

ISSN 1609-0586

**BAKİ UNİVERSİTETİNİN
XƏVƏRLƏRİ**

**ВЕСТНИК
БАКИНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА**

**NEWS
OF BAKU UNIVERSITY**

FİZİKA-RİYAZİYYAT
elmləri seriyası

серия
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

series of
PHYSICO-MATHEMATICAL SCIENCES

№ 2, 2022

Баки – 2022

RİYAZİYYAT

УДК 517.9

О НЕОБХОДИМЫХ УСЛОВИЯХ
В ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ С ОГРАНИЧЕНИЕМ

М.А.САДЫГОВ

Бакинский Государственный Университет
misreddin08@rambler.ru

В работе используя класс $S-(\alpha, \beta, \nu, \delta, \omega)$ и $S-(\beta, \delta)$ локально липшицевых отображений в точке получены необходимые условия первого и второго порядков в негладких экстремальных задачах с ограничением.

Ключевые слова: выпуклое множество, липшицевая функция, локально липшицевое отображение, банахово пространство.

В [1] определены $(\alpha, \beta, \nu, \delta)$ и $\varphi-(\alpha, \beta, \nu, \delta)$ локально липшицевые функции в точке в банаховом пространстве, изучен ряд их свойств и рассмотрены экстремальные задачи с ограничениями. В [2] в метрическом пространстве определены также $S-(\alpha, \beta, \nu, \delta, \omega)$ -липшицевых отображений в точке, изучен ряд их свойств. В [3] используя функцию расстояния в классах $\varphi-(\alpha, \beta, \nu, \delta, \omega)$ локально липшицевых функций в точке, получены ряд теорем о точном штрафе, а также получены необходимые и достаточные условия высокого порядка при наличии ограничений.

Пусть X и Y -банаховы пространства, $C \subset X$, $F: X \rightarrow Y$, $S: X \rightarrow Y$, $f: X \rightarrow R$, $\varphi: X \rightarrow R$, $\alpha > 0$, $\nu > 0$, $\beta \geq \alpha\nu$, $\delta > 0$ и $\omega: R_+ \rightarrow R_+$, где $\omega(0) = 0$, $R_+ = [0, +\infty)$.

Положим $B(x, \delta) = \{y \in X : \|y - x\| \leq \delta\}$, $B = \{y \in X : \|y\| \leq 1\}$.

Отображение F назовем $S-(\alpha, \beta, \nu, \delta, \omega)$ локально липшицевым с постоянной K в точке $\bar{x} \in X$, если F удовлетворяет условию

$$\|F(\bar{x} + x + y) - F(\bar{x} + x) - S(x + y) + S(x)\| \leq K \|y\|^{\nu} \left(\|x\|^{\beta - \alpha \nu} + \|y\|^{\frac{\beta - \alpha \nu}{\alpha}} \right) + \omega(\|x\|) \quad (1)$$

при $x, y \in \mathcal{D}$. Если $\omega(t) \equiv 0$, то отображение F назовем $S - (\alpha, \beta, \nu, \delta)$ локально липшицевым с постоянной K в точке \bar{x} . Если $\omega(t) \equiv 0$ и $S(x) \equiv 0$, то отображение F назовем $(\alpha, \beta, \nu, \delta)$ локально липшицевым с постоянной K в точке \bar{x} .

Если существует функция $o: R_+ \rightarrow R_+$, где $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{o(t)}{t} = 0$ такая, что $\omega(\|x\|) = o(\|x\|^{\beta})$, то $S - (\alpha, \beta, \nu, \delta, \omega)$ локально липшицевое с постоянной K в точке \bar{x} отображение F назовем $S - (\alpha, \beta, \nu, \delta, o(\beta))$ локально липшицевым с постоянной K в точке \bar{x} .

Если $F(x) = f(x)$, $S(x) = \varphi(x)$ и отображение F является $S - (\alpha, \beta, \nu, \delta, \omega)$ локально липшицевым с постоянной K в точке \bar{x} , то функцию f назовем $\varphi - (\alpha, \beta, \nu, \delta, \omega)$ локально липшицевой с постоянной K в точке \bar{x} . Если $\omega(t) \equiv 0$, то функцию f назовем $\varphi - (\alpha, \beta, \nu, \delta)$ локально липшицевой с постоянной K в точке \bar{x} . Если $\omega(t) \equiv 0$ и $\varphi(x) \equiv 0$, то функцию f назовем $(\alpha, \beta, \nu, \delta)$ локально липшицевой с постоянной K в точке \bar{x} .

Далее считаем, что $S(0) = 0$ и $\varphi(0) = 0$ (если $S(0) \neq 0$, то следует рассмотреть функцию $\tilde{S}(x) = S(x) - S(0)$).

Лемма 1. Если отображение $F: X \rightarrow Y$ является $S_1 + S_2 - (1, \beta, \nu, \delta, \omega)$ локально липшицевым с постоянной K в точке \bar{x} , S_2 является $(1, \bar{\beta}, \nu, \delta, \tilde{\omega})$ локально липшицевым с постоянной K в точке нуль, где $\beta \geq \bar{\beta} > 0$, $0 < \delta \leq 1$, то отображение F удовлетворяет $S_1 - (1, \bar{\beta}, \nu, \delta, \omega + \tilde{\omega})$ локально липшицеву условию с постоянной $2K$ в точке \bar{x} .

Подставив $x = 0$ и $\alpha = 1$ из (1) имеем, что

$$\|F(\bar{x} + y) - F(\bar{x}) - S(y)\| \leq K \|y\|^{\beta} \quad (2)$$

при $y \in \mathcal{D}$. Отметим, что по условию $\beta > 0$.

Отображение $F: X \rightarrow Y$ удовлетворяющее условию (2) при $y \in \mathcal{D}$, назовем $S - (\beta, \delta)$ локально липшицевым с постоянной K в точке \bar{x} .

Если $F(x) = f(x)$, $S(x) = \varphi(x)$ и отображение F является $S - (\beta, \delta)$ локально липшицевым с постоянной K в точке \bar{x} , то функцию f назовем $\varphi - (\beta, \delta)$ локально липшицевой с постоянной K в точке \bar{x} .

Если функция $f: X \rightarrow R$ удовлетворяет условию $f(\bar{x} + y) - f(\bar{x}) - \varphi(y) \leq K \|y\|^{\beta}$
 $(-K \|y\|^{\beta} \leq f(\bar{x} + y) - f(\bar{x}) - \varphi(y))$

при $y \in \delta B$, то функцию f назовем $\varphi-(\beta, \delta)$ локально (нижним) полулипшицевой с постоянной K в точке \bar{x} .

Если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\alpha > 0$, где $\alpha \leq \delta$, такое, что

$$f(\bar{x} + y) - f(\bar{x}) - \varphi(y) \leq \varepsilon \|y\|^\beta \quad (-\varepsilon \|y\|^\beta \leq f(\bar{x} + y) - f(\bar{x}) - \varphi(y))$$

при $y \in \alpha B$, то функцию f назовем $\varphi-(\beta, \delta)$ аппроксимативно локально (нижним) полулипшицевой в точке \bar{x} .

Если существует функция $o: R_+ \rightarrow R_+$, где $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{o(t)}{t} = 0$ такая, что

$$\|F(\bar{x} + y) - F(\bar{x}) - S(y)\| \leq o(\|y\|^\beta)$$

при $y \in \delta B$, то отображение $F: X \rightarrow Y$ назовем $S-(o(\beta), \delta)$ локально липшицевым в точке \bar{x} .

Если $F(x) = f(x)$, то положим $S(x) = \varphi(x)$.

Если существует функция $o: R_+ \rightarrow R_+$, где $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{o(t)}{t} = 0$ такая, что

$f(\bar{x} + y) - f(\bar{x}) - \varphi(y) \leq o(\|y\|^\beta)$ при $y \in \delta B$, то функцию f назовем $\varphi-(o(\beta), \delta)$ локально верхней полулипшицевой в точке \bar{x} .

В лемме 2.4.2 [1] доказано, что если $f(x)$ удовлетворяет условию липшица в $B(\bar{x}, \delta)$, то функция $f(x)$ является $\varphi-(1, \delta)$ аппроксимативно локально полулипшицевой в точке \bar{x} , где $\varphi(x) = \sup\{\langle p, x \rangle : p \in \partial_c f(\bar{x})\}$, $\partial_c f(\bar{x})$ субдифференциал Кларка (см.[4]) функции f в точке \bar{x} .

Следствие 1. Если отображение $F: X \rightarrow Y$ является $S_1 + S_2 - (\beta, \delta)$ локально липшицевым с постоянной K в точке \bar{x} , S_2 является $(\bar{\beta}, \delta)$ локально липшицевым с постоянной K в точке нуль, где $\beta \geq \bar{\beta} > 0$, $0 < \delta \leq 1$, то отображение F удовлетворяет $S_1 - (\bar{\beta}, \delta)$ локально липшицеву условию с постоянной $2K$ в точке \bar{x} .

Пусть $C \subset X$ и $x_0 \in C$. Вектор x называется допустимым направлением множества C в точке x_0 , если найдется такое число $\alpha_0 > 0$, что $x_0 + \alpha x \in C$ для любого $\alpha \in (0, \alpha_0]$. Совокупность всех допустимых направлений в точке x_0 множества C обозначим через $\gamma(x_0; C)$. Замыкание множества $\gamma(x_0; C)$ в X обозначим через $\gamma_1(x_0; C)$, т.е. положим $\gamma_1(x_0; C) = cl \gamma(x_0; C)$. Если $C \subset X$ выпуклое множество, то $\gamma(x_0; C) = \bigcup_{\lambda > 0} \frac{C - x_0}{\lambda}$ и $\gamma_1(x_0; C) = T_c(x_0) = cl \bigcup_{\lambda > 0} \frac{C - x_0}{\lambda}$.

Если $C \subset X$ выпуклое множество, то положим $N_c(x_0) = T_c(x_0)^-$,

т.е. $N_C(x_0)$ нормальный конус к C в точке x_0 (см.[5]).

Рассмотрим минимизацию функции $f_0(x)$ на множестве

$$\{x \in C : f_j(x) \leq 0, j = 1, 2, \dots, m, \Lambda x + y_0 = 0\}, \quad (3)$$

где $f_j : X \rightarrow R, j \in I = \{0, 1, \dots, m\}, \Lambda : X \rightarrow Y, Y$ банахово пространство, $y_0 \in Y$ и $C \subset X$.

Положим $I(x_0) = \{i \in \{1, 2, \dots, m\} : f_i(x_0) = 0\}, Ker \Lambda = \{x \in X : \Lambda x = 0\}$. Далее для простоты считаем, что $I(x_0) = \{1, 2, \dots, m\}$, т.е. все индексы $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ активны в точке x_0 (см. [6]).

Лемма 2. Если x_0 - точка локального минимума в задаче (3), функции f_i удовлетворяют $\varphi_i - (\beta, \delta)$ локально полулипшицеву условию с постоянной K в точке x_0 при $i \in I$, φ_i положительно однородная функция степени $\bar{\beta}$, где $\beta > \bar{\beta} > 0, f_i(x_0) = 0$ при $i \in \{1, 2, \dots, m\}, \Lambda : X \rightarrow Y$ линейный оператор, то $\max_{0 \leq i \leq m} \varphi_i(x) \geq 0$ при $x \in \{z \in \gamma(x_0; C) : \Lambda z = 0\}$.

Следствие 2. Если выполняется условие леммы 2, φ_i непрерывная функция при $i \in I$ и $\Lambda : X \rightarrow Y$ линейный непрерывный оператор, то $\max_{0 \leq i \leq m} \varphi_i(x) \geq 0$ при $x \in cl\{z \in \gamma(x_0; C) : \Lambda z = 0\}$.

Положим $K_C(x_0) = \{x \in X : \exists \lambda_x > 0, \exists o(x, \lambda) : [0, \lambda_x] \rightarrow X, \text{ где } \frac{o(x, \lambda)}{\lambda} \rightarrow 0 \text{ при } \lambda \downarrow 0, \text{ что } x_0 + \lambda x + o(x, \lambda) \in C\}$ (см.[7]).

Лемма 3. Если x_0 - точка локального минимума в задаче (3), где $\Lambda \equiv 0, y_0 = 0$, функции f_i удовлетворяют липшицеву условию в $B(x_0, \delta)$ с постоянной K и $\varphi_i - (2, \delta)$ локально полулипшицеву условию с постоянной K в точке x_0 при $i \in I, \varphi_i$ положительно однородная функция, $f_i(x_0) = 0$ при $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, то $\max_{0 \leq i \leq m} \varphi_i(x) \geq 0$ при $x \in K_C(x_0)$.

Отметим, что если $C = \{x \in X : F(x) = 0\}$, где отображение $F : X \rightarrow Y$ строго дифференцируемо в точке x_0 и $F'(x_0)X = Y$, то $K_C(x_0) = \{z \in X : F'(x_0)z = 0\}$.

Теорема 1. Если $X = R^n$ и $Y = R^s, x_0$ - точка локального минимума в задаче (3), функция f_i удовлетворяет $\varphi_i - (2, \delta)$ локально полулипшицеву условию с постоянной K в точке x_0 , где $i \in I, \varphi_i : R^n \rightarrow R$ сублинейные функции при $i \in I, f_i(x_0) = 0$ при $i \in \{1, 2, \dots, m\}, \Lambda : X \rightarrow Y$ линейный оператор и $\gamma(x_0; C)$ выпуклое множество, то существуют одновременно не равные нулю $\alpha_0 \geq 0, \alpha_1 \geq 0, \dots, \alpha_m \geq 0$ и $y^* \in Y^*$ такие, что $\sum_{i=0}^m \alpha_i \varphi_i(x) + \langle y^*, \Lambda x \rangle \geq 0$ при $x \in \gamma(x_0; C)$.

Отметим, что если x_0 - точка локального минимума в задаче (3), функции f_i удовлетворяют $\varphi_i - (\beta_i, \delta)$ аппроксимативно полулипшицеву условию в точке x_0 при $i \in I$, φ_i положительно однородная функция степени $\bar{\beta}_i$, где $\beta_i \geq \bar{\beta}_i > 0$, $\Lambda: X \rightarrow Y$ линейный оператор, то система $\varphi_i(x) < 0$ при $i \in I$ и $\Lambda x = 0$ не имеет решения в $\gamma(x_0; C)$. Поэтому теорема 1 остается верной, если в теореме 1 условие: функция f_i удовлетворяет $\varphi_i - (2, \delta)$ локально полулипшицеву условию с постоянной K в точке x_0 , заменить условием: функция f_i удовлетворяет $\varphi_i - (1, \delta)$ аппроксимативно полулипшицеву условию в точке x_0 .

Рассмотрим минимизацию функции $f_0(x)$ на множестве

$$f_j(x) \leq 0, j = 1, 2, \dots, m, F(x) = 0, \quad (4)$$

где $f_j: B(x_0, \delta) \rightarrow R, j \in I = \{0, 1, \dots, m\}, F: B(x_0, \delta) \rightarrow Y$ оператор.

Теорема 2. Пусть X и Y банаховы пространства, x_0 - точка локального минимума в задаче (4), функция f_i удовлетворяет $\varphi_i - (2, \delta)$ локально полулипшицеву условию с постоянной K в точке x_0 , где $i \in I$, $\varphi_i: X \rightarrow R$ сублинейные непрерывные функции при $i \in I$, $f_i(x_0) = 0$ при $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, отображение $F: X \rightarrow Y$ строго дифференцируемо в точке x_0 и $F'(x_0)X = Y$, то существуют $\alpha_0 \geq 0, \alpha_1 \geq 0, \dots, \alpha_m \geq 0$ и $y^* \in Y^*$ одновременно не равные нулю и векторы $\bar{x}_i^* \in \partial\varphi_i(x_0)$ такие, что $\sum_{i=0}^m \alpha_i \bar{x}_i^* + F'(x_0)^* y^* = 0$.

В работе используя теоремы Люстерника-Грейвса (см. [8]) или теоремы Банаха об открытом отображении (см. [11]) доказана бесконечный вариант теоремы Фана, которая далее применяется к получению необходимых условий в экстремальной задаче.

Рассмотрим минимизацию функции $f_0(x)$ на множестве

$$f_j(x) \leq 0, j = 1, 2, \dots, m, \|F(x)\| \leq \varepsilon, x \in C, \quad (5)$$

где $f_j: B(x_0, \delta) \rightarrow R, j \in I = \{0, 1, \dots, m\}, F: B(x_0, \delta) \rightarrow Y$ оператор, Y банахово пространство, $C \subset X$.

Лемма 4. Если существует $\varepsilon > 0$ такое, что x_0 - точка локального минимума в задаче (5) и $F(x_0) = 0$, функции f_i удовлетворяют $\varphi_i - (\beta_i, \delta)$ локально полулипшицеву условию с постоянной K в точке x_0 при $i \in I$, φ_i положительно однородная функция степени $\bar{\beta}_i$, $f_i(x_0) = 0$ при $i \in \{1, \dots, m\}$, отображение $F: X \rightarrow Y$ удовлетворяет $S - (\beta_0, \delta)$ локально липшицеву условию с постоянной K в точке x_0 , S положительно однородный оператор степени $\bar{\beta}_0$, где $\beta_i > \bar{\beta}_i > 0$ при $i \in I$, то система

$\varphi_i(x) < 0$ при $i \in I$ и $S(x) = 0$ не имеет решения в $\gamma(x_0; C)$.

Отметим, что, если $\varphi_i(x)$ при $i \in I$ выпуклые функции, $S(x)$ линейный оператор и $\gamma(x_0; C)$ выпуклый конус, то применяя теорему Фана при $X = R^n$, а кроме того, если $\text{int } \gamma(x_0; C) \neq \emptyset$, $\text{Im } S = Y$, $S(x)$ непрерывный оператор, аналог теореме Фана (см.[9]) при условии леммы 4 можно получить необходимое условие локального минимума для задачи (5).

Лемма 5. Если $\Lambda : X \rightarrow Y$ линейный непрерывный сюръективный оператор, $\varphi_i : X \rightarrow R$ сублинейные непрерывные функции при $i \in \{0, 1, \dots, m\}$, $C \subset X$ выпуклое множество, $x_0 \in C$, $\max_{0 \leq i \leq m} \varphi_i(x) \geq 0$ при $x \in \{z \in T_c(x_0) : \Lambda z = 0\}$, то

$$g(y, a) = \begin{cases} \inf_{x \in T_c(x_0), \Lambda x = y} \max_{0 \leq i \leq m} (\varphi_i(x) + a_i) : \text{если } T_c(x_0) \cap \Lambda^{-1}(-y) \neq \emptyset, \\ +\infty : \text{если } T_c(x_0) \cap \Lambda^{-1}(-y) = \emptyset \end{cases}$$

сублинейная функция в $Y \times R^{m+1}$, а если кроме того $\text{int } T_c(x_0) \cap \text{Ker } \Lambda \neq \emptyset$, то $T_c(x_0) \cap \Lambda^{-1}(-y) \neq \emptyset$ при $y \in Y$ и $g(y, a)$ сублинейная непрерывная функция в $Y \times R^{m+1}$, где $\text{Ker } \Lambda = \{x \in X : \Lambda x = 0\}$.

Обозначим $\tilde{C} = \text{int } C \cup \{x_0\}$, $S_c(x_0) = \bigcup_{\lambda > 0} \frac{\tilde{C} - x_0}{\lambda}$, $g_a(x) = \max_{0 \leq i \leq m} (\varphi_i^1(x) + a_i) + \delta_{T_c(x_0) \cap \text{Ker } \Lambda}(x)$, где $a \in R^{m+1}$, $a = (a_0, a_1, \dots, a_m)$, $I = \{0, 1, \dots, m\}$, $g_a^*(p) = \sup_{x \in X} \{ \langle p, x \rangle - g_a(x) \}$, где $p \in X^*$.

Теорема 3. Если X и Y банаховы пространства, x_0 - точка локального минимума в задаче (3), $\beta > 2$, функции f_i , $i \in I$, удовлетворяют $\varphi_i^1 + \varphi_i^2 - (\beta, \delta)$ локально полулипшицеву условию с постоянной K в точке x_0 , $\varphi_i^1 : X \rightarrow R$ сублинейные непрерывные функции и $f_i(x_0) = 0$ при $i \in I$, $\varphi_i^2 : X \rightarrow R$ положительные однородные степени 2 функции при $i \in I$ и удовлетворяют $(1, 2, 1, \delta, o(2))$ локально липшицеву условию с постоянной K в точке нуль, $\Lambda : X \rightarrow Y$ линейный непрерывный сюръективный оператор, C выпуклое множество, $\text{int } T_c(x_0) \cap \text{Ker } \Lambda \neq \emptyset$ и $\partial g_a^*(0) \neq \emptyset$ при $a \in R^{m+1}$, то существуют $\alpha_0 \geq 0, \alpha_1 \geq 0, \dots, \alpha_m \geq 0$, где $\sum_{i=0}^m \alpha_i = 1$, $x_i^* \in \partial \varphi_i^1(0)$ при $i \in I$, $y^* \in Y^*$ и $x^* \in N_c(x_0)$ такие, что $\sum_{i=0}^m \alpha_i x_i^* + \Lambda^* y^* + x^* = 0$ и

$$E(h) = \sup \left\{ \sum_{i=0}^m \lambda_i \varphi_i^2(h) : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^m \lambda_i = 1, x_i^* \in \varphi_i^1(0), y^* \in Y^*, \right. \\ \left. x^* \in N_c(x_0), \sum_{i=0}^m \lambda_i x_i^* + \Lambda^* y^* + x^* = 0 \right\} \geq 0$$

при $h \in D = \{x \in X : \varphi_i^1(x) \leq 0, i = 0, 1, \dots, m, \Lambda x = 0, x \in S_c(x_0)\}$.

Обозначим $\bar{g}_a(x) = \max_{0 \leq i \leq m} (\varphi_i^1(x) + a_i)$, где $a \in R^{m+1}$.

Теорема 4. Если X банахово пространство, x_0 - точка локального минимума в задаче (3), где $\Lambda \equiv 0$, $y_0 = 0$, $C = X$, $f_i(x_0) = 0$ при $i \in I$, функция f_i , $i \in I$, удовлетворяет $\varphi_i^1 + \varphi_i^2 - (o(2), \delta)$ локально верхней полулипшицеву условию в точке x_0 , $\varphi_i^1: X \rightarrow R$ сублинейные непрерывные функции при $i \in I$, $\varphi_i^2: X \rightarrow R$ удовлетворяют $(1, 2, 1, \delta, o(2))$ локально липшицеву условию в точке нуль, и положительные однородные степени 2 функции при $i \in I$, $\partial \bar{g}_a^*(0) \neq \emptyset$ при $a \in R^{m+1}$, то существуют $\alpha_0 \geq 0, \alpha_1 \geq 0, \dots, \alpha_m \geq 0$, где $\sum_{i=0}^m \alpha_i = 1$ и $x_i^* \in \partial \varphi_i^1(0)$ такие, что $\sum_{i=0}^m \alpha_i x_i^* = 0$ и

$$E(h) = \sup \left\{ \sum_{i=0}^m \lambda_i \varphi_i^2(h) : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^m \lambda_i = 1, x_i^* \in \varphi_i^1(0), \sum_{i=0}^m \lambda_i x_i^* = 0 \right\} \geq 0$$

при $h \in D_1 = \{x \in X : \varphi_i^1(x) \leq 0, i = 0, 1, \dots, m\}$.

Рассмотрим минимизацию функции $f_0(x)$ на множестве

$$f_j(x) \leq 0, j = 1, 2, \dots, m, F(x) = 0, \quad x \in C \quad (6)$$

где $f_j: B(x_0, 2\delta) \rightarrow R, j \in I = \{0, 1, \dots, m\}$, $F: B(x_0, 2\delta) \rightarrow Y$ оператор, $C \subset B(x_0, 2\delta)$.

Множество гиперкасательных (касательных) векторов к множеству C в точке $x_0 \in C$ обозначим через $I_C(x_0)$ (см.[4], с.59) ($T_C(x_0)$). Обозначим $N_C(x_0) = T_C(x_0)^-$ (см.[4], с.54).

Положим $H = \{x \in X : \varphi_i^1(x) \leq 0, i = 0, 1, \dots, m, F'(x_0)x = 0, x \in I_C(x_0)\}$, $g_{(a,y)}(x) = \max_{0 \leq i \leq m} (\varphi_i^1(x) + a_i) + \delta_{T_C(x_0) \cap \Lambda^{-1}(-y)}(x)$, где $(a, y) \in R^{m+1} \times Y$, $a = (a_0, a_1, \dots, a_m)$, $\Lambda x = F'(x_0)x$.

Теорема 5. Если X и Y банаховы пространства, x_0 - точка локального минимума в задаче (6), $f_i(x_0) = 0$ при $i \in I$, функции $f_i, i \in I$, удовлетворяют $\varphi_i^1 + \varphi_i^2 - (o(2), \delta)$ локально верхней полулипшицеву условию в точке x_0 , $\varphi_i^1: X \rightarrow R$ сублинейные непрерывные функции при $i \in I$, $\varphi_i^2: X \rightarrow R$ положительные однородные степени 2 функции и удовлетворяют $(1, \mu, 1, \delta)$, где $\mu > 1$, (или $(1, 2, 1, \delta, o(2))$) локально липшицеву условию с постоянной K в точке нуль при $i \in I$, отображение $F: X \rightarrow Y$ строго дифференцируемо в точке x_0 , $F'(x_0)X = Y$ и F удовлетворяет $F'(x_0)x + S(x) - (o(2), \delta)$ локально липшицеву условию в точке x_0 , $S: X \rightarrow Y$ положительный однородный степени 2 оператор и удовлетворяет $(1, \mu, 1, \delta)$ (или $(1, 2, 1, \delta, \tilde{o}(2))$) локально липшицеву условию с постоянной K в точке нуль, $\partial g_{(a,y)}^*(0) \neq \emptyset$ при $(a, y) \in R^{m+1} \times Y$, $C \subset X$ и $I_C(x_0) \cap \text{Ker } \Lambda \neq \emptyset$, где $\Lambda x = F'(x_0)x$, то

$$E(h) = \sup \left\{ \sum_{i=0}^m \lambda_i \varphi_i^2(h) + \langle y^*, S(h) \rangle : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^m \lambda_i = 1, p_i \in \partial \varphi_i^1(0), x^* \in N_c(x_0), \right. \\ \left. y^* \in Y^*, \sum_{i=0}^m \lambda_i p_i + \Lambda^* y^* + x^* = 0 \right\} \geq 0$$

при $h \in H \cup \{0\}$.

Доказательство. Пусть $t \geq 0, t_1 \geq 0, t_2 \geq 0$. Так как $\varphi_i^2 : X \rightarrow R$ удовлетворяет $(1, \mu, 1, \delta)$ локально липшицеву условию с постоянной K в точке нуль, то

$$|\varphi_i^2(t_1 x_1 + t_2 x_2) - \varphi_i^2(x_1)| \leq K t_2 \|x_2\| (t_2^{\mu-1} \|x_2\|^{\mu-1} + \|t_1 x_1\|^{\mu-1})$$

при $x_1, x_2 \in X, t_1 \|x_1\| \leq \delta, t_2 \|x_2\| \leq \delta$. Поэтому $|\varphi_i^2(tx)| \leq K t^\mu \|x\|^\mu$ при $t \|x\| \leq \delta, i \in I$, где $\mu > 1$. По условию функции $f_i, i \in I$, удовлетворяют $\varphi_i^1 + \varphi_i^2 - (o(2), \delta)$ локально полулипшицеву условию в точке x_0 . Поэтому

$$f_i(x_0 + tx) \leq \varphi_i^1(tx) + \varphi_i^2(tx) + o(t^2 \|x\|^2) \leq \varphi_i^1(tx) + K t^\mu \|x\|^\mu + o(t^2 \|x\|^2)$$

при $x \in X, t \|x\| \leq \delta$ и $i \in I$. Так как $S : X \rightarrow Y$ удовлетворяет $(1, \mu, 1, \delta)$ локально липшицеву условию с постоянной K в точке нуль, где $\mu > 1$, то

$$\|S(t_1 x_1 + t_2 x_2) - S(t_1 x_1)\| \leq K t_2 \|x_2\| (t_2^{\mu-1} \|x_2\|^{\mu-1} + \|t_1 x_1\|^{\mu-1})$$

при $x_1, x_2 \in X, t_1 \|x_1\| \leq \delta, t_2 \|x_2\| \leq \delta$. Поэтому $\|S(tx)\| \leq K t^\mu \|x\|^\mu$ при $x \in X, t \|x\| \leq \delta$.

Из неравенства $\|F(x_0 + tx) - F(x_0) - F'(x_0)tx - S(tx)\| \leq o(t^2 \|x\|^2)$ при $x \in X, t \|x\| \leq \delta$ имеем, что $\|F(x_0 + tx) - F'(x_0)tx - F(x_0)\| \leq K t^\mu \|x\|^\mu + o(t^2 \|x\|^2)$ при $x \in X, t \|x\| \leq \delta$. Тогда из замечания теоремы 4.3[9] следует, что $\max_{0 \leq i \leq m} \varphi_i^1(x) \geq 0$ при $x \in T_c(x_0) \cap \text{Ker } \Lambda$.

Пусть $h \in H$. Рассмотрим задачу

$$\max_{0 \leq i \leq m} (\varphi_i^1(x) + \varphi_i^2(h)) \rightarrow \inf, \quad x \in T_c(x_0), \quad \Lambda x + S(h) = 0.$$

Положим $a_i = \varphi_i^2(h), y = S(h)$ и $g(y, a) = \inf_{x \in T_c(x_0), \Lambda x + y = 0} \max_{0 \leq i \leq m} (\varphi_i^1(x) + a_i)$. Из леммы 1.4 [10] следует, что $(y^*, b) \in \partial g(0, 0)$ в том и только в том случае, когда существуют $\alpha_i \geq 0, \sum_{i=0}^m \alpha_i = 1$ такие, что $-\Lambda^* y^* \in \sum_{i=0}^m \alpha_i \partial \varphi_i^1(0) + N_c(x_0)$ и $b = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m)$. Поэтому

$$\partial g(0, 0) = \{(y^*, \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m) : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^m \lambda_i = 1, p_i \in \partial \varphi_i^1(0), x^* \in N_c(x_0),$$

$$y^* \in Y^*, \sum_{i=0}^m \lambda_i p_i + x^* + \Lambda^* y^* = 0\}.$$

По теореме Хермандера (см.[11, с.203]) имеем, что $g(y, a) = \sup_{(y^*, \lambda) \in \partial g(0, 0)} (\langle y^*, y \rangle + \sum_{i=0}^m \lambda_i a_i)$.

Так как $\partial g_{(a, y)}^*(0) \neq \emptyset$ при $(a, y) \in R^{m+1} \times Y$, то существует точка $x = \xi(h)$,

где $x \in T_c(x_0)$, $\Lambda x + S(h) = 0$ такая, что

$$\begin{aligned} g(y, a) &= \inf_{x \in T_c(x_0), \Lambda x + y = 0} \max_{0 \leq i \leq m} (\varphi_i^1(x) + a_i) = \max_{0 \leq i \leq m} (\varphi_i^1(\xi(h)) + \varphi_i^2(h)) = \\ &= \sup_{(y^*, \lambda) \in \partial g(0, 0)} (\langle y^*, y \rangle + \sum_{i=0}^m \lambda_i a_i) = \sup \{ \langle y^*, y \rangle + \sum_{i=0}^m \lambda_i a_i : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^m \lambda_i = 1, \\ & p_i \in \partial \varphi_i^1(0), x^* \in N_c(x_0), y^* \in Y^*, \sum_{i=0}^m \lambda_i p_i + x^* + \Lambda^* y^* = 0 \}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} E(h) &= g(S(h), \varphi^2(h)) = \max_{0 \leq i \leq m} (\varphi_i^1(\xi(h)) + \varphi_i^2(h)) = \sup \{ \langle y^*, S(h) \rangle + \sum_{i=0}^m \lambda_i \varphi_i^2(h) : \lambda_i \geq 0, \\ & \sum_{i=0}^m \lambda_i = 1, p_i \in \partial \varphi_i^1(0), x^* \in N_c(x_0), y^* \in Y^*, \sum_{i=0}^m \lambda_i p_i + x^* + \Lambda^* y^* = 0 \}, \end{aligned}$$

где $\varphi^2(h) = (\varphi_0^2(h), \varphi_1^2(h), \dots, \varphi_m^2(h))$, $\Lambda \xi(h) + S(h) = 0$.

Так как F удовлетворяет $F'(x_0)x + S(x) - o(2, \delta)$ локально липшицеву условию с постоянной K в точке x_0 , то

$$\|F(x_0 + th + t^2 \xi) - F(x_0) - \Lambda(th + t^2 \xi) - S(th + t^2 \xi)\| \leq o(\|th + t^2 \xi\|^2)$$

при $t \in [0, t_0]$, где $t_0 = \min\{1, \frac{\delta}{\|\Lambda\| + \|\xi\| + 1}\}$. Поэтому из соотношения $\Lambda h = 0$ и $\Lambda \xi + S(h) = 0$ вытекает, что

$$\|F(x_0 + th + t^2 \xi) - F(x_0) + S(th) - S(th + t^2 \xi)\| \leq o(\|th + t^2 \xi\|^2)$$

при $t \in [0, t_0]$. Отсюда имеем, что

$$\begin{aligned} \|F(x_0 + th + t^2 \xi)\| &\leq \|S(th + t^2 \xi) - S(th)\| + o(\|th + t^2 \xi\|^2) \leq \\ &\leq K t^2 \|\xi\| (\|th\|^{\mu-1} + \|t^2 \xi\|^{\mu-1}) + o(\|th + t^2 \xi\|^2) = o_1(t^2) \end{aligned}$$

при $t \in [0, t_0]$, где $\frac{o_1(t)}{t} \rightarrow 0$ при $t \downarrow 0$. По теореме Люстерника [12, с.33] существуют $r: R_+ \rightarrow X$ и число $m > 0$ такие, что $F(x_0 + th + t^2 \xi + r(t)) = 0$, $\|r(t)\| \leq m \|F(x_0 + th + t^2 \xi)\| = o_2(t^2)$ при $t \in [0, t_0]$, где $r(t) = x(x_0 + th + t^2 \xi)$, $o_2(t) = m o_1(t)$, $\frac{o_2(t)}{t} \rightarrow 0$ при $t \downarrow 0$.

Кроме того имеем, что существует число $t_1 > 0$, где $t_1 \leq t_0$, такое, что

$$f_i(x_0 + th + t^2 \xi + r(t)) - f_i(x_0) - \varphi_i^1(th + t^2 \xi + r(t)) - \varphi_i^2(th + t^2 \xi + r(t)) \leq o(\|th + t^2 \xi + r(t)\|^2)$$

при $t \in [0, t_1]$. По условию $\varphi_i^1(x)$ сублинейная непрерывная функция в X . Тогда существует число $c > 0$ такое, что $|\varphi_i^1(x)| \leq c \|x\|$ при $x \in X$ и $i \in I$.

Поэтому $\lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t^2} \varphi_i^1(r(t)) = \lim_{t \downarrow 0} \varphi_i^1(\frac{1}{t^2} r(t)) = 0$, т.е. $\varphi_i^1(r(t)) = o_3(t^2)$, где $\frac{o_3(t)}{t} \rightarrow 0$ при $t \downarrow 0$. Тогда отсюда следует, что

$$f_i(x_0 + th + t^2 \xi + r(t)) - f_i(x_0) \leq \varphi_i^1(th + t^2 \xi + r(t)) + \varphi_i^2(th + t^2 \xi + r(t)) - \varphi_i^2(th) +$$

$$\begin{aligned}
& + \varphi_i^2(th) + o(\|th + t^2\xi + r(t)\|^2) \leq \varphi_i^1(th) + \varphi_i^1(t^2\xi) + \varphi_i^1(r(t)) + o(\|th + t^2\xi + r(t)\|^2) + \\
& + K\|t^2\xi + r(t)\|(\|th\|^{\mu-1} + \|t^2\xi + r(t)\|^{\mu-1}) + \varphi_i^1(th) \leq t^2\varphi_i^1(\xi) + t^2\varphi_i^2(h) + o_4(t^2)
\end{aligned}$$

при $t \in [0, t_1]$, где $\frac{o_4(t)}{t} \rightarrow 0$ при $t \downarrow 0$. Положив $f(x) = \max_{0 \leq i \leq m} f_i(x)$ имеем, что $f(x_0 + th + t^2\xi + r(t)) = \max_{0 \leq i \leq m} f_i(x_0 + th + t^2\xi + r(t)) \leq t^2 \max_{0 \leq i \leq m} (\varphi_i^1(\xi) + \varphi_i^2(h)) + o_4(t^2)$ при $t \in [0, t_1]$.

Так как $h \in I_C(x_0)$, то по определению $I_C(x_0)$ существует $\alpha_0 > 0$ такое, что $x_0 + th + t^2\xi + r(t) \in C$ при $t \in [0, \alpha_0]$.

Если допустить, что $E(h) < 0$, то имеем $f(x_0 + th + t^2\xi + r(t)) < 0$ при малых $t > 0$. Так как x_0 - точка локального минимума в задаче (2), то получим противоречие. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Садыгов М.А. Экстремальные задачи для негладких систем. - Баку, - 1996, - 148 с.
2. Садыгов М.А. Задачи на экстремум с ограничениями в метрическом пространстве. ДАН, - 2013, - т. 452, - №5, - с.490-493.
3. Садыгов М.А. Субдифференциал высшего порядка и оптимизация. LAP LAMBERT Academic Publishing, Deutschland, - 2014, - 359 p.
4. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. - Москва: Наука, -1988, - 280 с.
5. Обен Ж.П., Экланд И. Прикладной нелинейный анализ. - Москва: Мир, - 1988, - 510 с.
6. Евтушенко Ю.Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. - Москва: Наука, - 1982, - 432 с.
7. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. - Москва: Наука, - 1979, - 429 с.
8. Иоффе А.Д. Метрическая регулярность и субдифференциальное исчисление. // Успехи математических наук, 2000, т.55, вып. 3, с.103-162.
9. Садыгов М.А. Необходимое условие экстремума в локально выпуклом пространстве.// Spirit time.-2019.-2(14), с.44-55.
10. Садыгов М.А. Необходимое условие экстремума второго порядка в локально выпуклом пространстве.// Spirit time.-2019.-2(14), с.31-43.
11. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. - Москва: Наука, - 1974, - 479 с.
12. Алексеев В.М., Галаев Э.М., Тихомиров В.М. Сборник задач по оптимизации. - Москва: Наука, - 1984, - 288 с.

MƏHDUDİYYƏTLİ EKSTREMAL MƏSƏLƏDƏ ZƏRURİ ŞƏRTLƏR HAQQINDA

M.A.САДЫГОВ

XÜLASƏ

İşdə nöqtədə $S - (\alpha, \beta, \nu, \delta, \omega)$ və $S - (\beta, \delta)$ lokal lipşis şərtini ödəyən inikaslar sinfindən istifadə edilərək, Banax fəzasında məhdudiyətli ekstremal məsələdə birinci və ikinci tərtib zəruri şərtlər alınmışdır.

Açar sözlər: qabarıq çoxluq, lipşis funksiya, lokal lipşis inikas, banax fəzası.

ON THE NECESSARY CONDITIONS IN EXTREMUM PROBLEMS WITH CONSTRAINT

M.A.SADYGOV

SUMMARY

In the work using $S - (\alpha, \beta, \nu, \delta, \omega)$ and $S - (\beta, \delta)$ local Lipschitz mappings at the point, first and second order necessary extremum conditions are obtained for nonsmooth extreme problems with constraint in the Banach space.

Keywords: convex set, lipschitz function, local Lipschitz mapping, Banach space.

УДК 517.956

**СУЩЕСТВОВАНИЕ ЛОКАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ
ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИЛЬНО ДИССИПАТИВНЫХ
ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕЛИНЕЙНЫМИ
АКУСТИЧЕСКИМИ УСЛОВИЯМИ СОПРЯЖЕНИЯ**

С.Э.ИСАЕВА

*Бакинский Государственный Университет
isayevasevda@rambler.ru*

В данной работе рассматривается смешанная задача для нелинейных сильно диссипативных волновых уравнений с нелинейными акустическими условиями сопряжения. Доказана теорема о существовании и единственности локальных решений для рассматриваемой задачи.

Ключевые слова: Сильно диссипативное волновое уравнение, нелинейные акустические условия сопряжения, локальное решение, теорема о неподвижной точке.

Пусть $\Omega \subset R^n$ ($n \geq 1$) – ограниченная область с гладкой границей

$\Gamma_1, \Omega_2 \subset \Omega$ – подобласть с гладкой границей Γ_2 и $\Omega_1 = \Omega \setminus (\Omega_2 \cup \Gamma_2)$ – подобласть с границей $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, причем $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$. В области Ω рассмотрим следующую нелинейную задачу с акустическими условиями сопряжения:

$$u_{tt} - \Delta u_t - \Delta u + |u_t|^{q_1-1} u_t = f_1(u) \quad \text{в } \Omega_1 \times (0, \infty), \quad (1)$$

$$v_{tt} - \Delta v_t - \Delta v + |v_t|^{q_2-1} v_t = f_2(v) \quad \text{в } \Omega_2 \times (0, \infty), \quad (2)$$

$$M \delta_t + D \delta_t + K \delta = -u_t \quad \text{на } \Gamma_2 \times (0, \infty), \quad (3)$$

$$u = 0 \quad \text{на } \Gamma_1 \times (0, \infty), \quad (4)$$

$$u = v, \quad \delta_t = \frac{\partial u}{\partial \nu} - \frac{\partial v}{\partial \nu} + \frac{\partial u_t}{\partial \nu} - \frac{\partial v_t}{\partial \nu} + \rho(u_t) \quad \text{на } \Gamma_2 \times (0, \infty), \quad (5)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \Omega_1, \quad (6)$$

$$v(x, 0) = v_0(x), \quad v_t(x, 0) = v_0(x), \quad x \in \Omega_2, \quad (7)$$

$$\delta(x, 0) = \delta_0(x), \quad \delta_t(x, 0) = \frac{\partial u_0}{\partial v} - \frac{\partial v_0}{\partial v} + \frac{\partial u_1}{\partial v} - \frac{\partial v_1}{\partial v} + \rho(u_1) \equiv \delta_1, \quad x \in \Gamma_2, \quad (8)$$

где v – внешняя нормаль границы Γ ; $f_1, f_2, \rho: (-\infty; +\infty) \rightarrow (-\infty; +\infty)$,

$$M, D, K: \Gamma_2 \rightarrow (-\infty; +\infty), \quad u_0, u_1: \Omega_1 \rightarrow (-\infty; +\infty), \quad v_0, v_1: \Omega_2 \rightarrow (-\infty; +\infty),$$

$\delta_0: \Gamma_2 \rightarrow (-\infty; +\infty)$ – заданные функции, $q_i \geq 1, i = 1, 2$.

Задачи сопряжения изучены, например, в [1-4]. В [5] авторы сравнили некоторые граничные условия, среди которых имеются и акустические граничные условия. Гиперболические уравнения с акустическими граничными условиями впервые рассмотрены в работе [6] и изучены в работах различных авторов (см., например, [7-11]).

В этой работе доказывается теорема о существовании и единственности локальных решений задачи (1)-(8) для нелинейных сильно диссипативных волновых уравнений с нелинейными акустическими условиями сопряжения.

Введем следующие обозначения.

Скалярное произведение и норма в $L^2(\Omega_i)$ ($i=1,2$) и $L^2(\Gamma_2)$ обозначаются, соответственно, как

$$(u, v)_i = \int_{\Omega_i} u(x)v(x)dx, \quad \|u\|_i = \left(\int_{\Omega_i} (u(x))^2 dx \right)^{1/2}, \quad i = 1, 2,$$

$$(\delta, \theta)_{\Gamma_2} = \int_{\Gamma_2} \delta(x)\theta(x)d\Gamma_2, \quad \|\delta\|_{\Gamma_2} = \left(\int_{\Gamma_2} (\delta(x))^2 d\Gamma_2 \right)^{1/2}.$$

Введем замкнутое подпространство $H_{\Gamma_1}^1(\Omega_1)$ пространства $H^1(\Omega_1)$, как

$$H_{\Gamma_1}^1(\Omega_1) = \{ u \in H^1(\Omega_1) : \gamma_0(u) = 0 \text{ п. в. на } \Gamma_1 \},$$

где $\gamma_0: H^1(\Omega_1) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)$ – оператор следа нулевого порядка и $H^{1/2}(\Gamma)$ есть пространство Соболева порядка $\frac{1}{2}$ (см. [12]). Заметим что норма в $H_{\Gamma_1}^1(\Omega_1)$:

$$\|u\|_{H_{\Gamma_1}^1(\Omega_1)} = \left(\sum_{i=1}^n \int_{\Omega_i} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx \right)^{1/2}$$

и норма в $H^1(\Omega_1)$ эквивалентны, так как неравенство Пуанкаре удовле-

творяется в $H_{\Gamma_1}^1(\Omega_1)$. Таким образом, рассматриваем $H_{\Gamma_1}^1(\Omega_1)$ с вышеуказанной нормой.

Отображение $\gamma_1: H(\Delta, \Omega_1) \cup H(\Delta, \Omega_2) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma_2)$ - оператор следа Неймана на $H(\Delta, \Omega_1) \cup H(\Delta, \Omega_2)$, где пространства

$$H(\Delta, \Omega_i) = \{u \in H^1(\Omega_i): \Delta u \in L^2(\Omega_i)\}, \quad i = 1, 2$$

снабжены нормами

$$\|u\|_{\Delta, \Omega_i} = \left(\|u\|_{H^1(\Omega_i)}^2 + \|\Delta u\|_i^2 \right)^{1/2}, \quad i = 1, 2.$$

Определение 1. Тройку функций $(u(x, t), v(x, t), \delta(x, t))$, где $u: \Omega_1 \times [0, T] \rightarrow R$, $v: \Omega_2 \times [0, T] \rightarrow R$, $\delta: \Gamma_2 \times [0, T] \rightarrow R$, назовем слабым решением задачи (1)-(8), если

$$\begin{aligned} u &\in L^\infty(0, T; H_{\Gamma_1}^1(\Omega_1)), \quad v \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega_2)), \quad \gamma_0(u) = \gamma_0(v) \text{ п. в. на } \Gamma_2 \times (0, T), \\ u_t &\in L^\infty(0, T; L^2(\Omega_1)) \cap L^{q_1+1}(\Omega_1 \times (0, T)), \quad v_t \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega_2)) \cap L^{q_2+1}(\Omega_2 \times (0, T)), \\ \delta, \delta_t &\in L^\infty(0, T; L^2(\Gamma_2)) \end{aligned}$$

и выполнены следующие равенства:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}(u_t, \Phi)_1 + (\nabla u_t, \nabla \Phi)_1 + (\nabla u, \nabla \Phi)_1 + (|u_t|^{q_1-1} u_t, \Phi)_1 + \\ &+ \frac{d}{dt}(v_t, \Psi)_2 + (\nabla v_t, \nabla \Psi)_2 + (\nabla v, \nabla \Psi)_2 + (|v_t|^{q_2-1} v_t, \Psi)_2 + \\ &+ (\rho(\gamma_0(u_t)), \gamma_0(\Phi))_{\Gamma_2} - (\delta_t, \gamma_0(\Phi))_{\Gamma_2} = (f_1(u), \Phi)_1 + (f_2(v), \Psi)_2 \end{aligned}$$

для $\forall \Phi \in H_{\Gamma_1}^1(\Omega_1)$, $\forall \Psi \in H^1(\Omega_2)$ таких, что $\Phi = \Psi$ на Γ_2 , в смысле распределений в $D'(0, T)$ и

$$\frac{d}{dt}(\gamma_0(u) + M\delta_t, e)_{\Gamma_2} + (D\delta_t + K\delta, e)_{\Gamma_2} = 0$$

для $\forall e \in L^2(\Gamma_2)$, в смысле распределений в $D'(0, T)$, а также:

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x) \quad \text{п. в. в } \Omega_1,$$

$$v(x, 0) = v_0(x), \quad v_t(x, 0) = v_1(x) \quad \text{п. в. в } \Omega_2,$$

$$\delta(x, 0) = \delta_0(x), \quad \delta_t(x, 0) = \delta_1(x) \quad \text{п. в. на } \Gamma_2.$$

Теорема 1. Пусть

$$M, D, K \in C(\Gamma_2), \quad M > 0, \quad D > 0, \quad K > 0 \quad \text{для } \forall x \in \Gamma_2; \quad (9)$$

$$f_1, f_2 \in C^1(-\infty; +\infty) \text{ и существуют постоянные } c_i > 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

такие, что

$$|f_1(s)| \leq c_1 |s|^p, \quad |f_1'(s)| \leq c_2 |s|^{p-1}, \quad |f_2(s)| \leq c_3 |s|^p, \quad |f_2'(s)| \leq c_4 |s|^{p-1}; \quad (10)$$

$$1 \leq p \leq \frac{n}{n-2}, \text{ если } n \geq 3 \text{ и } p \geq 1, \text{ если } n = 1, 2; \quad (11)$$

$$1 \leq q_i \leq \frac{n+2}{n-2}, \text{ если } n \geq 3, q_i \geq 1, \text{ если } n = 1, 2. \quad (12)$$

$$\rho \in C^1(-\infty; +\infty), |\rho(s)| \leq c_5 |s|^{q_1} \quad (c_5 > 0); \quad (13)$$

$$\rho(s) \text{ — монотонно возрастающая функция на } (-\infty; +\infty). \quad (14)$$

Тогда для $\forall (u_0, v_0, \delta_0) \in H_{\Gamma_1}^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2) \times L^2(\Gamma_2)$, $\forall (u_1, v_1, \delta_1) \in L^{2q_1}(\Omega_1) \times L^{2q_2}(\Omega_2) \times L^2(\Gamma_2)$ существует число $T > 0$ такое, что задача (1)-(8) имеет единственное слабое решение (u, v, δ) , удовлетворяющее условиям

$$\begin{aligned} u &\in C([0, T]; H_{\Gamma_1}^1(\Omega_1)), \quad u_t \in C([0, T]; L^2(\Omega_1)) \cap L^{q_1+1}(\Omega_1 \times (0, T)), \\ v &\in C([0, T]; H^1(\Omega_2)), \quad v_t \in C([0, T]; L^2(\Omega_2)) \cap L^{q_2+1}(\Omega_2 \times (0, T)), \\ \delta, \delta_t &\in L^\infty(0, T; L^2(\Gamma_2)); \end{aligned}$$

кроме того, если $T_{\max} > 0$ — длина максимального интервала существования решения (u, v, δ) , то справедлива следующая альтернатива:

либо $T_{\max} = +\infty$;

либо $\lim_{t \rightarrow T_{\max}^-} \left(\|u_t\|_1^2 + \|v_t\|_2^2 + \|\nabla u\|_1^2 + \|\nabla v\|_2^2 + \|\sqrt{M} \delta_t\|_{\Gamma_2}^2 + \|\sqrt{K} \delta\|_{\Gamma_2}^2 \right) = +\infty$.

Доказательство Теоремы 1.

Рассмотрим следующую задачу:

$$U_{tt} - \Delta U_t - \Delta U + |U_t|^{q_1-1} U_t = F_1 \quad \text{в } \Omega_1 \times (0, T), \quad (15)$$

$$V_{tt} - \Delta V_t - \Delta V + |V_t|^{q_2-1} V_t = F_2 \quad \text{в } \Omega_2 \times (0, T), \quad (16)$$

$$M \delta_{tt} + D \delta_t + K \delta = -U_t \quad \text{на } \Gamma_2 \times (0, T), \quad (17)$$

$$U = 0 \quad \text{на } \Gamma_1 \times (0, T), \quad (18)$$

$$U = V, \quad \delta_t = \frac{\partial U}{\partial \nu} - \frac{\partial V}{\partial \nu} + \frac{\partial U_t}{\partial \nu} - \frac{\partial V_t}{\partial \nu} + \rho(U_t) \quad \text{на } \Gamma_2 \times (0, T), \quad (19)$$

$$U(x, 0) = u_0(x), \quad U_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \Omega_1, \quad (20)$$

$$V(x, 0) = v_0(x), \quad V_t(x, 0) = v_1(x), \quad x \in \Omega_2, \quad (21)$$

$$\delta(x, 0) = \delta_0(x), \quad \delta_t(x, 0) = \delta_1(x), \quad x \in \Gamma_2; \quad (22)$$

где $T > 0$; $F_1 = F_1(x, t)$ и $F_2 = F_2(x, t)$ - некоторые фиксированные функции, определенные на $\Omega_1 \times (0, T)$ и $\Omega_2 \times (0, T)$, соответственно.

Чтобы доказать Теорему 1, нам понадобятся две леммы: Лемма 1 и Лемма 2.

Лемма 1. Пусть выполнены условия (9), (12)-(14) и

$$F_1 \in H^1(0, T; L^2(\Omega_1)), F_2 \in H^1(0, T; L^2(\Omega_2)), \quad (23)$$

$$u_0 \in H_{\Gamma_1}^1(\Omega_1) \cap H^2(\Omega_1), u_1 \in H_{\Gamma_1}^1(\Omega_1) \cap H^2(\Omega_1) \cap L^{2q_1}(\Omega_1), \quad (24)$$

$$v_0 \in H^2(\Omega_2), v_1 \in H^2(\Omega_2) \cap L^{2q_2}(\Omega_2), \quad (25)$$

$$\delta_0, \delta_1 \in L^2(\Gamma_2). \quad (26)$$

Тогда задача (15)-(22) имеет единственное слабое решение (U, V, δ) , удовлетворяющее условиям

$$U \in L^\infty(0, T; H_{\Gamma_1}^1(\Omega_1)), U_t \in L^\infty(0, T; H_{\Gamma_1}^1(\Omega_1)) \cap L^{q_1+1}(\Omega_1 \times (0, T)), \\ U_{tt} \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega_1)), \quad (27)$$

$$V \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega_2)), V_t \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega_2)) \cap L^{q_2+1}(\Omega_2 \times (0, T)), \\ V_{tt} \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega_2)), \quad (28)$$

$$(-\Delta U + |U_t|^{q_1-1} U_t)(t) \in L^2(\Omega_1), (-\Delta V + |V_t|^{q_2-1} V_t)(t) \in L^2(\Omega_2) \text{ п. в. на } (0, T), \quad (29)$$

$$\delta, \delta_t, \delta_{tt} \in L^\infty(0, T; L^2(\Gamma_2)). \quad (30)$$

Доказательство Леммы 1. *Аппроксимации Фаздо-Галеркина.*

Пусть $\{(\Phi_j, \Psi_j)\}$ и $\{e_j\}$ ($j \in N$) линейно независимые, полные системы в пространствах

$$W = \{(u, v) \in (H_{\Gamma_1}^1(\Omega_1) \cap H^2(\Omega_1)) \times H^2(\Omega_2), \gamma_0(u) = \gamma_0(v) \text{ п. в. на } \Gamma_2\} \text{ и } L^2(\Gamma_2),$$

соответственно. Так как Γ_1 и Γ_2 являются достаточно гладкими, то $\Phi_j \in H_{\Gamma_1}^1(\Omega_1) \cap H^2(\Omega_1) \cap L^\infty(\Omega_1)$ и $\Psi_j \in H^2(\Omega_2) \cap L^\infty(\Omega_2)$ для любого $j \in N$. Будем искать “приближенное” решение рассматриваемой задачи в виде

$$(U_m(x, t), V_m(x, t)) = \sum_{i=1}^m \alpha_{im}(t) (\Phi_i, \Psi_i), \quad \delta_m(x, t) = \sum_{i=1}^m \beta_{im}(t) e_i, \quad m \in N,$$

где $\alpha_{im}(t)$ и $\beta_{im}(t)$ определяются из равенств:

$$(U_{mt}, \Phi_j)_1 + (\nabla U_{mt}, \nabla \Phi_j)_1 + (\nabla U_m, \nabla \Phi_j)_1 + (|U_{mt}|^{q_1-1} U_{mt}, \Phi_j)_1 + \\ + (V_{mt}, \Psi_j)_2 + (\nabla V_{mt}, \nabla \Psi_j)_2 + (\nabla V_m, \nabla \Psi_j)_2 + (|V_{mt}|^{q_2-1} V_{mt}, \Psi_j)_2 - \\ - (\delta_{mt}, \gamma_0(\Phi_j))_{\Gamma_2} + (\rho(U_m), \gamma_0(\Phi_j))_{\Gamma_2} = (F_1, \Phi_j)_1 + (F_2, \Psi_j)_2, \quad (31)$$

$$(M\delta_{mtt} + D\delta_{mt} + K\delta_m, e_j)_{\Gamma_2} = -(\gamma_0(U_m), e_j)_{\Gamma_2}, \quad 1 \leq j \leq m, \quad (32)$$

$$\delta_{mt} = \frac{\partial U_m}{\partial \nu} - \frac{\partial V_m}{\partial \nu} + \frac{\partial U_{mt}}{\partial \nu} - \frac{\partial V_{mt}}{\partial \nu} + \rho(U_m), \quad x \in \Gamma_2, \quad (33)$$

$$(U_m(x, 0), V_m(x, 0)) = (U_{0m}, V_{0m}) = \sum_{i=1}^m a_{im} (\Phi_i, \Psi_i) \rightarrow (u_0, v_0) \text{ в } W, \quad (34)$$

$$(U_{mt}(x, 0), V_{mt}(x, 0)) = (U_{1m}, V_{1m}) = \sum_{i=1}^m b_{im} (\Phi_i, \Psi_i) \rightarrow (u_1, v_1) \text{ в } (H_{\Gamma_1}^1(\Omega_1) \cap L^{2q_1}(\Omega_1)) \times (H^1(\Omega_2) \cap L^{2q_2}(\Omega_2)), \quad (35)$$

$$\delta_m(x, 0) = \delta_{0m} = \sum_{i=1}^m c_{im} e_i \rightarrow \delta_0 \text{ в } L^2(\Gamma_2), \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \delta_{mt}(x, 0) &= \gamma_1(U_{0m} - V_{0m} + U_{1m} - V_{1m}) + \\ &+ \gamma_0(\rho(U_{1m})) = \sum_{i=1}^m d_{im} e_i \rightarrow \delta_1 \text{ в } L^2(\Gamma_2) \end{aligned} \quad (37)$$

при $m \rightarrow \infty$. Общие результаты о нелинейных системах гарантируют существование решения (U_m, V_m, δ_m) ($m \in N$) задачи (31)-(37) на интервале $[0, T_m]$ (оценка 1 показывает, что $T_m = T$). Из (1.5.31), (32) имеем

$$\begin{aligned} &(U_{mt}, \Phi)_1 + (\nabla U_{mt}, \nabla \Phi)_1 + (\nabla U_m, \nabla \Phi)_1 + (|U_{mt}|^{q_1-1} U_{mt}, \Phi)_1 + \\ &+ (V_{mt}, \Psi)_2 + (\nabla V_{mt}, \nabla \Psi)_2 + (\nabla V_m, \nabla \Psi)_2 + (|V_{mt}|^{q_2-1} V_{mt}, \Psi)_2 - (\delta_{mt}, \gamma_0(\Phi))_{\Gamma_2} + \\ &+ (\rho(U_{mt}), \gamma_0(\Phi))_{\Gamma_2} = (F_1, \Phi)_1 + (F_2, \Psi)_2, \end{aligned} \quad (38)$$

$$(M\delta_{mt} + D\delta_{mt} + K\delta_m, e)_{\Gamma_2} = -(\gamma_0(U_{mt}), e)_{\Gamma_2}, \quad (39)$$

для $\forall \Phi \in \text{Span}\{\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_m, \dots\}$, $\forall \Psi \in \text{Span}\{\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_m, \dots\}$, $\forall e \in \text{Span}\{e_1, e_2, \dots, e_m, \dots\}$.

Оценка 1. Полагая $\Phi = 2U_{mt}$, $\Psi = 2V_{mt}$ в (38) и $e = 2\delta_{mt}$ в (39), получаем равенства

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \|U_{mt}\|_1^2 + 2\|\nabla U_{mt}\|_1^2 + \frac{d}{dt} \|\nabla U_m\|_1^2 + 2(|U_{mt}|^{q_1-1} U_{mt}, U_{mt})_1 + \\ &+ \frac{d}{dt} \|V_{mt}\|_2^2 + 2\|\nabla V_{mt}\|_2^2 + \frac{d}{dt} \|\nabla V_m\|_2^2 + 2(|V_{mt}|^{q_2-1} V_{mt}, V_{mt})_2 - (\delta_{mt}, \gamma_0(2U_{mt}))_{\Gamma_2} + \\ &+ 2(\rho(U_{mt}), \gamma_0(U_{mt}))_{\Gamma_2} = 2(F_1, U_{mt})_1 + 2(F_2, V_{mt})_2, \\ &\frac{d}{dt} \|\sqrt{M}\delta_{mt}\|_{\Gamma_2}^2 + 2\|\sqrt{D}\delta_{mt}\|_{\Gamma_2}^2 + \frac{d}{dt} \|\sqrt{K}\delta_m\|_{\Gamma_2}^2 + (\gamma_0(U_{mt}), 2\delta_{mt})_{\Gamma_2} = 0, \end{aligned}$$

складывая которых и используя (33), имеем

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \left(\|U_{mt}\|_1^2 + \|\nabla U_m\|_1^2 + \|V_{mt}\|_2^2 + \|\nabla V_m\|_2^2 + \|\sqrt{M}\delta_{mt}\|_{\Gamma_2}^2 + \|\sqrt{K}\delta_m\|_{\Gamma_2}^2 \right) + 2\|\nabla U_{mt}\|_1^2 + 2\|\nabla V_{mt}\|_2^2 + \\ &+ 2(\rho(U_{mt}), U_{mt})_{\Gamma_2} + 2\|\sqrt{D}\delta_{mt}\|_{\Gamma_2}^2 + 2(|U_{mt}|^{q_1+1}, 1)_1 + 2(|V_{mt}|^{q_2+1}, 1)_2 = 2(F_1, U_{mt})_1 + 2(F_2, V_{mt})_2. \end{aligned}$$

или так как в силу (13): $\rho(s)s \geq 0, \forall s \in (-\infty, +\infty)$, получаем

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\|U_{mt}\|_1^2 + \|\nabla U_m\|_1^2 + \|V_{mt}\|_2^2 + \|\nabla V_m\|_2^2 + \|\sqrt{M}\delta_{mt}\|_{\Gamma_2} + \|\sqrt{K}\delta_m\|_{\Gamma_2}^2 \right) + 2\|\nabla U_{mt}\|_1^2 + \\ & + 2\|\nabla V_{mt}\|_2^2 + 2\|\sqrt{D}\delta_{mt}\|_{\Gamma_2}^2 + 2\left(|U_{mt}|^{q_1+1}, 1\right)_1 + 2\left(|V_{mt}|^{q_2+1}, 1\right)_2 = 2(F_1, U_{mt})_1 + 2(F_2, V_{mt})_2. \end{aligned} \quad (40)$$

Интегрируя равенство (40) от 0 до t ($t \leq T_m$), используя (34)-(37) и неравенство Юнга, получаем

$$\begin{aligned} & \|U_{mt}\|_1^2 + \|\nabla U_m\|_1^2 + \|V_{mt}\|_2^2 + \|\nabla V_m\|_2^2 + \|\sqrt{M}\delta_{mt}\|_{\Gamma_2} + \|\sqrt{K}\delta_m\|_{\Gamma_2}^2 + \\ & + 2\int_0^t \left(\|\nabla U_{ms}\|_1^2 + \|\nabla V_{ms}\|_2^2 + \|\sqrt{D}\delta_{ms}\|_{\Gamma_2}^2 \right) ds + 2\int_0^t \left[\left(|U_{ms}|^{q_1+1}, 1\right)_1 + \left(|V_{ms}|^{q_2+1}, 1\right)_2 \right] ds \leq \\ & \leq \|U_{1m}\|_1^2 + \|\nabla U_{0m}\|_1^2 + \|V_{1m}\|_2^2 + \|\nabla V_{0m}\|_2^2 + \|\sqrt{M}\gamma_1(U_{0m} - V_{0m} + U_{1m} - V_{1m}) + \gamma_0(\rho(U_{1m}))\|_{\Gamma_2}^2 + \\ & + \|\sqrt{K}\delta_{0m}\|_{\Gamma_2}^2 + \int_0^t \|F_1\|_1^2 ds + \int_0^t \|F_2\|_2^2 ds + \int_0^t \left(\|U_{ms}\|_1^2 + \|V_{ms}\|_2^2 \right) ds, \end{aligned}$$

откуда, согласно (9), (12), (23)-(26) и неравенству Гронуолла, получаем Оценку 1:

$$\begin{aligned} & \|U_{mt}\|_1^2 + \|\nabla U_m\|_1^2 + \|V_{mt}\|_2^2 + \|\nabla V_m\|_2^2 + \|\delta_{mt}\|_{\Gamma_2} + \|\delta_m\|_{\Gamma_2}^2 + \\ & + \int_0^t \left(\|\nabla U_{ms}\|_1^2 + \|\nabla V_{ms}\|_2^2 + \|\delta_{ms}\|_{\Gamma_2}^2 \right) d\tau + \int_0^t \left[\left(|U_{ms}|^{q_1+1}, 1\right)_1 + \left(|V_{ms}|^{q_2+1}, 1\right)_2 \right] ds \leq C_1, \end{aligned}$$

где C_1 - положительная константа, не зависящая от m . Отсюда следует, что $T_m = T$.

Оценка 2. Оценим нормы $\|U_{mt}(0)\|_1^2$, $\|V_{mt}(0)\|_2^2$ и $\|\delta_{mt}(0)\|_{\Gamma_2}^2$. Используя (33) в (38) имеем

$$\begin{aligned} & (U_{mt}, \Phi)_1 + (\nabla U_m, \nabla \Phi)_1 + (\nabla U_m, \nabla \Phi)_1 - \left(\frac{\partial U_{mt}}{\partial v}, \gamma_0(\Phi) \right)_{\Gamma_2} - \left(\frac{\partial U_m}{\partial v}, \gamma_0(\Phi) \right)_{\Gamma_2} + \\ & + \left(|U_{mt}|^{q_1-1} U_{mt}, \Phi \right)_1 + (V_{mt}, \Psi)_2 + (\nabla V_{mt}, \nabla \Psi)_2 + (\nabla V_m, \nabla \Psi)_2 + \left(\frac{\partial V_{mt}}{\partial v}, \gamma_0(\Psi) \right)_{\Gamma_2} + \\ & + \left(\frac{\partial V_m}{\partial v}, \gamma_0(\Psi) \right)_{\Gamma_2} + \left(|V_{mt}|^{q_2-1} V_{mt}, \Psi \right)_2 = (F_1, \Phi)_1 + (F_2, \Psi)_2, \end{aligned} \quad (41)$$

Полагая $\Phi = U_{mt}$ и $\Psi = V_{mt}$ в (41), $e = \delta_{mt}$ в (39) и $t = 0$ в полученных равенствах, получаем

$$\begin{aligned} & \|U_{mt}(0)\|_1^2 + \|V_{mt}(0)\|_2^2 = \left(\Delta U_{1m} + \Delta U_{0m} - |U_{1m}|^{q_1-1} U_{1m} + F_1(x, 0), U_{mt}(0) \right)_1 + \\ & + \left(\Delta V_{1m} + \Delta V_{0m} - |V_{1m}|^{q_2-1} V_{1m} + F_2(x, 0), V_{mt}(0) \right)_2 \leq \\ & \leq \left(\|\Delta U_{1m} + \Delta U_{0m} - |U_{1m}|^{q_1-1} U_{1m} + F_1(x, 0)\|_1 + \right. \\ & \left. + \|\Delta V_{1m} + \Delta V_{0m} - |V_{1m}|^{q_2-1} V_{1m} + F_2(x, 0)\|_2 \right) \left(\|U_{mt}(0)\|_1 + \|V_{mt}(0)\|_2 \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\sqrt{M}\delta_{mtt}(0)\|_{\Gamma_2}^2 &= \left(-D(\gamma_1(U_{0m}-V_{0m}+U_{1m}-V_{1m})+\gamma_0(\rho(U_{1m}))) - K\delta_{0m} - \gamma_0(U_{1m}), \delta_{mtt}(0)\right)_{\Gamma_2} \leq \\ &\leq \left\| -D(\gamma_1(U_{0m}-V_{0m}+U_{1m}-V_{1m})+\gamma_0(\rho(U_{1m}))) - K\delta_{0m} - \gamma_0(U_{1m}) \right\|_{\Gamma_2} \|\delta_{mtt}(0)\|_{\Gamma_2}, \end{aligned}$$

откуда, согласно (9), (12), (23)-(26), имеем

$$\|U_{mtt}(0)\|_1^2 + \|V_{mtt}(0)\|_2^2 + \|\delta_{mtt}(0)\|_{\Gamma_2}^2 \leq C_2, \quad (42)$$

где C_2 - положительная константа, не зависящая от m .

Дифференцируя равенства (38), (39) и полагая $\Phi = 2U_{mtt}$, $\Psi = 2V_{mtt}$, $e = 2\delta_{mtt}$, получаем

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \left(\|U_{mtt}\|_1^2 + \|\nabla U_{mtt}\|_1^2 + \|V_{mtt}\|_2^2 + \|\nabla V_{mtt}\|_2^2 + \|\sqrt{M}\delta_{mtt}\|_{\Gamma_2}^2 + \|\sqrt{K}\delta_{mtt}\|_{\Gamma_2}^2 \right) + \\ &+ 2\|\nabla U_{mtt}\|_1^2 + 2\|\nabla V_{mtt}\|_2^2 + 2\|\sqrt{D}\delta_{mtt}\|_{\Gamma_2}^2 + (\rho'(U_{mtt})U_{mtt}, \gamma_0(2U_{mtt}))_{\Gamma_2} + \\ &+ 2q_1 \int_{\Omega_1} |U_{mtt}|^{q_1-1} U_{mtt}^2 dx + 2q_2 \int_{\Omega_2} |V_{mtt}|^{q_2-1} V_{mtt}^2 dx = 2(F_{1t}, U_{mtt})_1 + 2(F_{2t}, V_{mtt})_2, \end{aligned} \quad (43)$$

Используя неравенство Юнга в (43), имеем

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \left(\|U_{mtt}\|_1^2 + \|\nabla U_{mtt}\|_1^2 + \|V_{mtt}\|_2^2 + \|\nabla V_{mtt}\|_2^2 + \|\sqrt{M}\delta_{mtt}\|_{\Gamma_2}^2 + \|\sqrt{K}\delta_{mtt}\|_{\Gamma_2}^2 \right) + \\ &+ 2\|\nabla U_{mtt}\|_1^2 + 2\|\nabla V_{mtt}\|_2^2 + 2\|\sqrt{D}\delta_{mtt}\|_{\Gamma_2}^2 + (\rho'(U_{mtt})U_{mtt}, \gamma_0(2U_{mtt}))_{\Gamma_2} + \\ &+ \frac{8q_1}{(q_1+1)^2} \int_{\Omega_1} \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(|U_{mtt}|^{\frac{q_1-1}{2}} U_{mtt} \right) \right)^2 dx + \frac{8q_2}{(q_2+1)^2} \int_{\Omega_2} \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(|V_{mtt}|^{\frac{q_2-1}{2}} V_{mtt} \right) \right)^2 dx \leq \\ &\leq \|F_{1t}\|_1^2 + \|F_{2t}\|_2^2 + \|U_{mtt}\|_1^2 + \|V_{mtt}\|_2^2. \end{aligned}$$

интегрируя последнее неравенство вдоль $(0, t)$ и используя тот факт, что в силу (13): $\rho'(s) \geq 0, \forall s \in (-\infty, +\infty)$, имеем

$$\begin{aligned} &\|U_{mtt}\|_1^2 + \|\nabla U_{mtt}\|_1^2 + \|V_{mtt}\|_2^2 + \|\nabla V_{mtt}\|_2^2 + \|\sqrt{M}\delta_{mtt}\|_{\Gamma_2}^2 + \|\sqrt{K}\delta_{mtt}\|_{\Gamma_2}^2 + \\ &+ 2 \int_0^t \left(\|\nabla U_{mtt}\|_1^2 + \|\nabla V_{mtt}\|_2^2 + \|\sqrt{D}\delta_{mtt}\|_{\Gamma_2}^2 \right) ds + \\ &+ \frac{8q_1}{(q_1+1)^2} \int_0^t \int_{\Omega_1} \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(|U_{mtt}|^{\frac{q_1-1}{2}} U_{mtt} \right) \right)^2 dx ds + \frac{8q_2}{(q_2+1)^2} \int_0^t \int_{\Omega_2} \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(|V_{mtt}|^{\frac{q_2-1}{2}} V_{mtt} \right) \right)^2 dx ds \leq \\ &\leq \|U_{mtt}(0)\|_1^2 + \|\nabla U_{1m}\|_1^2 + \|V_{mtt}(0)\|_2^2 + \|\nabla V_{1m}\|_2^2 + \|\sqrt{M}\delta_{mtt}(0)\|_{\Gamma_2}^2 + \\ &+ \|\sqrt{K}(\gamma_1(U_{0m}-V_{0m}+U_{1m}-V_{1m})+\gamma_0(\rho(U_{1m})))\|_{\Gamma_2}^2 + \\ &+ \int_0^t (\|F_{1t}\|_1^2 + \|F_{2t}\|_2^2) ds + \int_0^t (\|U_{mtt}\|_1^2 + \|V_{mtt}\|_2^2) ds, \end{aligned}$$

откуда, используя (23)-(26) и (42), согласно неравенству Гронуолла получаем Оценку 2:

$$\begin{aligned} & \|U_{mt}\|_1^2 + \|\nabla U_{mt}\|_1^2 + \|V_{mt}\|_2^2 + \|\nabla V_{mt}\|_2^2 + \|\sqrt{M}\delta_{mt}\|_{\Gamma_2}^2 + \|\sqrt{K}\delta_{mt}\|_{\Gamma_2}^2 + \\ & + 2\int_0^t \left(\|\nabla U_{mt}\|_1^2 + \|\nabla V_{mt}\|_2^2 + \|\sqrt{D}\delta_{mt}\|_{\Gamma_2}^2 \right) ds + \frac{8q_1}{(q_1+1)^2} \int_0^t \int_{\Omega_1} \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(|U_{mt}|^{\frac{q_1-1}{2}} U_{mt} \right) \right)^2 dx ds + \\ & + \frac{8q_2}{(q_2+1)^2} \int_0^t \int_{\Omega_2} \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(|V_{mt}|^{\frac{q_2-1}{2}} V_{mt} \right) \right)^2 dx ds \leq C_3, \end{aligned}$$

где C_3 - положительная константа, не зависящая от t .

Доказательство существования решений завершается таким же образом, как в Теореме 2.1 из [13].

Единственность. Пусть (U_1, V_1, δ_1) и (U_2, V_2, δ_2) - два решения задачи (15)-(22). Тогда для $U_1 - U_2 = \tilde{U}$, $V_1 - V_2 = \tilde{V}$, $\delta_1 - \delta_2 = \tilde{\delta}$ имеем

$$\begin{aligned} & (\tilde{U}_t, \Phi)_1 + (\nabla \tilde{U}_t, \nabla \Phi)_1 - \left(\frac{\partial \tilde{U}_t}{\partial V}, \gamma_0(\Phi) \right)_{\Gamma_2} + (\nabla \tilde{U}, \nabla \Phi)_1 - \left(\frac{\partial \tilde{U}}{\partial V}, \gamma_0(\Phi) \right)_{\Gamma_2} + \\ & + (\tilde{V}_t, \Psi)_2 + (\nabla \tilde{V}_t, \nabla \Psi)_2 + \left(\frac{\partial \tilde{V}_t}{\partial V}, \gamma_0(\Psi) \right)_{\Gamma_2} + (\nabla \tilde{V}, \nabla \Psi)_2 + \left(\frac{\partial \tilde{V}}{\partial V}, \gamma_0(\Psi) \right)_{\Gamma_2} + \\ & + \int_{\Omega_1} (|U_{1t}|^{q_1-1} U_{1t} - |U_{2t}|^{q_1-1} U_{2t}) \Phi dx + \int_{\Omega_2} (|V_{1t}|^{q_2-1} V_{1t} - |V_{2t}|^{q_2-1} V_{2t}) \Psi dx = 0, \end{aligned}$$

ИЛИ

$$\begin{aligned} & (\tilde{U}_t, \Phi)_1 + (\nabla \tilde{U}_t, \nabla \Phi)_1 + (\nabla \tilde{U}, \nabla \Phi)_1 + (\tilde{V}_t, \Psi)_2 + (\nabla \tilde{V}_t, \nabla \Psi)_2 + (\nabla \tilde{V}, \nabla \Psi)_2 + \\ & + \int_{\Omega_1} (|U_{1t}|^{q_1-1} U_{1t} - |U_{2t}|^{q_1-1} U_{2t}) \Phi dx + \int_{\Omega_2} (|V_{1t}|^{q_2-1} V_{1t} - |V_{2t}|^{q_2-1} V_{2t}) \Psi dx - \end{aligned} \quad (44)$$

$$- (\tilde{\delta}_t + \rho(U_{1t}) - \rho(U_{2t}), \gamma_0(\Phi))_{\Gamma_2} = 0,$$

$$(M\tilde{\delta}_t + D\tilde{\delta}_t + K\tilde{\delta}, e)_{\Gamma_2} = -(\gamma_0(\tilde{U}_t), e)_{\Gamma_2}, \quad (45)$$

для любого $(\Phi, \Psi, e) \in W$, п. в. на $(0, T)$;

$$\tilde{U} = 0 \quad \text{п. в. в.} \quad \Gamma_1 \times (0, T), \quad (46)$$

$$\tilde{U} = \tilde{V}, \quad \tilde{\delta}_t = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial V} - \frac{\partial \tilde{V}}{\partial V} + \frac{\partial \tilde{U}_t}{\partial V} - \frac{\partial \tilde{V}_t}{\partial V} + \rho(U_{1t}) - \rho(U_{2t}) \quad \text{п. в. в.} \quad \Gamma_2 \times (0, T), \quad (47)$$

$$\tilde{U}(x, 0) = 0, \quad \tilde{U}_t(x, 0) = 0 \quad x \in \Omega_1, \quad (48)$$

$$\tilde{V}(x, 0) = 0, \quad \tilde{V}_t(x, 0) = 0 \quad x \in \Omega_2, \quad (49)$$

$$\tilde{\delta}(x, 0) = 0, \quad \tilde{\delta}_t(x, 0) = 0 \quad x \in \Gamma_2. \quad (50)$$

Полагая $\Phi = 2\tilde{U}_t$, $\Psi = 2\tilde{V}_t$ в (44) и $e = 2\tilde{\delta}_t$ в (45) получаем

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\|\tilde{U}_t\|_1^2 + \|\nabla\tilde{U}\|_1^2 + \|\tilde{V}_t\|_2^2 + \|\nabla\tilde{V}\|_2^2 + \|\sqrt{M}\tilde{\delta}_t\|_{\Gamma_2}^2 + \|\sqrt{K}\tilde{\delta}\|_{\Gamma_2}^2 \right) + 2\|\nabla\tilde{U}_t\|_1^2 + 2\|\nabla\tilde{V}_t\|_2^2 + \\ & + 2\|\sqrt{D}\tilde{\delta}_t\|_{\Gamma_2}^2 + 2(\rho(U_{1t}) - \rho(U_{2t}), U_{1t} - U_{2t})_{\Gamma_2} + 2(|U_{1t}|^{q_1-1}U_{1t} - |U_{2t}|^{q_1-1}U_{2t}, U_{1t} - U_{2t})_1 + \\ & + 2(|V_{1t}|^{q_2-1}V_{1t} - |V_{2t}|^{q_2-1}V_{2t}, V_{1t} - V_{2t})_2 = 0. \end{aligned} \quad (51)$$

Так как $(|U_{1t}|^{q_1-1}U_{1t} - |U_{2t}|^{q_1-1}U_{2t}, U_{1t} - U_{2t})_1 \geq 0$, $(|V_{1t}|^{q_2-1}V_{1t} - |V_{2t}|^{q_2-1}V_{2t}, V_{1t} - V_{2t})_2 \geq 0$ и в силу (13):

$$(\rho(U_{1t}) - \rho(U_{2t}), U_{1t} - U_{2t})_{\Gamma_2} \geq 0,$$

то из (51) имеем

$$\frac{d}{dt} \left(\|\tilde{U}_t\|_1^2 + \|\nabla\tilde{U}\|_1^2 + \|\tilde{V}_t\|_2^2 + \|\nabla\tilde{V}\|_2^2 + \|\sqrt{M}\tilde{\delta}_t\|_{\Gamma_2}^2 + \|\sqrt{K}\tilde{\delta}\|_{\Gamma_2}^2 \right) \leq 0.$$

Используя (48)-(50) в последнем неравенстве, получаем

$$\|\tilde{U}_t\|_1^2 + \|\nabla\tilde{U}\|_1^2 + \|\tilde{V}_t\|_2^2 + \|\nabla\tilde{V}\|_2^2 + \|\sqrt{M}\tilde{\delta}_t\|_{\Gamma_2}^2 + \|\sqrt{K}\tilde{\delta}\|_{\Gamma_2}^2 \leq 0.$$

Отсюда имеем $\tilde{U} = 0$, $\tilde{V} = 0$, $\tilde{\delta} = 0$.

Лемма 1 доказана.

Для заданных $u \in C([0, T]; H_{\Gamma_1}^1(\Omega_1)) \cap C^1([0, T]; L^2(\Omega_1))$, $v \in C([0, T]; H^1(\Omega_2)) \cap C^1([0, T]; L^2(\Omega_2))$, которые удовлетворяют условию $u|_{\Gamma_2} = v|_{\Gamma_2}$, рассмотрим следующую задачу

$$\begin{cases} U_{tt} - \Delta U_t - \Delta U + |U_t|^{q_1-1}U_t = f_1(u) & \text{в } \Omega_1 \times (0, T), \\ V_{tt} - \Delta V_t - \Delta V + |V_t|^{q_2-1}V_t = f_2(v) & \text{в } \Omega_2 \times (0, T), \\ M\delta_{tt} + D\delta_t + K\delta = -U_t & \text{на } \Gamma_2 \times (0, T), \\ U = 0 & \text{на } \Gamma_1 \times (0, T), \\ U = V, \delta_t = \frac{\partial U}{\partial \nu} - \frac{\partial V}{\partial \nu} + \frac{\partial U_t}{\partial \nu} - \frac{\partial V_t}{\partial \nu} + \rho(U_t) & \text{на } \Gamma_2, \\ U(x, 0) = u_0(x), U_t(x, 0) = u_1(x), x \in \Omega_1, \\ V(x, 0) = v_0(x), V_t(x, 0) = v_1(x), x \in \Omega_2, \\ \delta(x, 0) = \delta_0(x), \delta_t(x, 0) = \delta_1(x), x \in \Gamma_2. \end{cases} \quad (52)$$

Лемма 2. Пусть выполнены условия (9)-(13) и $u_0 \in H_{\Gamma_1}^1(\Omega_1)$, $u_1 \in L^{2q_1}(\Omega_1)$, $v_0 \in H^1(\Omega_2)$, $v_1 \in L^{2q_2}(\Omega_2)$, $\delta_0 \in L^2(\Gamma_2)$, $\delta_1 \in L^2(\Gamma_2)$. Тогда существует число $T > 0$ такое, что задача (52) имеет единственное слабое ре-

шение (U, V, δ) , удовлетворяющее условиям
 $U \in C([0, T]; H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1))$, $U_i \in C([0, T]; L^2(\Omega_1)) \cap L^{q+1}(\Omega_1 \times (0, T))$,
 $V \in C([0, T]; H^1(\Omega_2))$, $V_i \in C([0, T]; L^2(\Omega_2)) \cap L^{q+1}(\Omega_2 \times (0, T))$,
 $\delta, \delta_i \in L^\infty(0, T; L^2(\Gamma_2))$.

Доказательство Леммы 2 и завершение доказательства Теоремы 1 осуществляем таким же образом, как в теореме 2.1 из [13].

Теорема 1 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. R.Dautray, J.L.Lions; Analyse et Calcul Numerique pour les Sciences et les Techniques, Vol. 1, Masson, Paris, 1984.
2. J.E. Muñoz Rivera, H.Portillo Oquendo; The transmission problem of viscoelastic waves, Acta Applicandae Mathematicae, 60 (2000), 1-21.
3. J.J.Bae; Nonlinear transmission problem for wave equation with boundary condition of memory type, Acta, Appl. Math. 110 (2010), n. 2, 907-919.
4. A.B.Aliev, E.H.Mammadhasanov, Well-posedness of initial boundary value problem on longitudinal impact on a composite linear viscoelastic bar, Mathematical Methods in the Applied Sciences, v. 40, n. 14, 2017, pp.5380-5390.
5. C.G.Gal, G.R.Goldstein, J.A. Goldstein, Oscillatory boundary conditions for acoustic wave equations, J. Evol. Equ. 3(4) (2003), 623-635.
6. J.T.Beale, S. I. Rosencrans; Acoustic boundary conditions, Bull. Amer. Math.Soc., 80, n.6 (1974), 1276-1278.
7. J.T.Beale; Acoustic scattering from locally reacting surfaces, Indiana Univ. Math. J. 26 (1977), 199-222.
8. C.L.Frota, A.Vicente; A hyperbolic system of Klein-Gordon type with acoustic boundary conditions, Int. J.Pure Appl. Math., 47, n.2 (2008), 185-198.
9. D.Mugnolo; Abstract wave equations with acoustic boundary conditions, Math. Nachr., 279 (2006), n. 3, 299-318.
10. A. Vicente, Wave equation with acoustic/memory boundary conditions, Bol. Soc. Parana. Mat. (3) 27 (1) (2009), 29-39.
11. Y. Boukhatem, B.Benabderrahmane, Existence and decay of solutions for a viscoelastic wave equation with acoustic boundary conditions, Nonlinear Analysis 97 (2014), 191-209.
12. Ж.Л.Лионс, Э.Мадженес, Неоднородные граничные задачи и их приложения, М.1971.
13. S.E.Isayeva, Nonlinear wave equations with nonlinear transmission acoustic condition, Proceedings of IMM of NAS of Azerbaijan, 2021, v. 47, n. 2, 232-249.

**QEYRİ-XƏTTİ AKUSTİK QOŞMALIQ ŞƏRTLİ
QEYRİ-XƏTTİ GÜCLÜ DİSSIPATİV DALĞA TƏNLİKLƏRİ ÜÇÜN
LOKAL HƏLLƏRİN VARLIĞI**

S.E.İSAYEVA

XÜLASƏ

Baxılan işdə qeyri-xətti akustik qoşmalığ şərtli qeyri-xətti güclü dissipativ dalğa tənlikləri üçün qarışıq məsələyə baxılıb. Həmin məsələ üçün lokal həllin varlığı və yeganəliyi haqqında teorem isbat olunub.

Açar sözlər. Güclü dissipativ dalğa tənliyi, qeyri-xətti akustik qoşmalığ şərtlər, lokal həll, tərənəmən nöqtə haqqında teorem.

**EXISTENCE OF LOCAL SOLUTIONS FOR NONLINEAR STRONGLY
DISSIPATIVE WAVE EQUATIONS WITH NONLINEAR TRANSMISSION
ACOUSTIC CONDITIONS**

S.E.ISAYEVA

SUMMARY

In this work we consider the mixed problem for nonlinear strongly dissipative wave equations with nonlinear transmission acoustic conditions. We prove the existence and uniqueness of local solutions for this problem.

Keywords. Strongly dissipative wave equation, nonlinear transmission acoustic condition, local solution, fixed point theorem.

УДК 514.763

**PARAMETRİK XƏTTİ PROQRAMLAŞDIRMANIN BÖYÜK
ÖLÇÜLÜ BİR MƏSƏLƏSİ VƏ ONUN HƏLLİ****R.H.HƏMİDOV, N.K.ALLAHVERDİYEVA***Bakı Dövlət Universiteti*
shakiamidov@gmail.com

Parametrik məsələnin böyük ölçülü olması onun həlli üçün standart olmayan xüsusi yanaşmalar tələb edir. Əksər hallarda belə yanaşmalar həll olunacaq məsələnin xüsusi strukturunu nəzərə almaqla işlənir. İşdə xətti proqramlaşdırmanın tətbiqi əhəmiyyət daşıyan böyük ölçülü parametrik məsələsi tədqiq olunur. Məsələnin əsasında Leontyevin məlum çoxsahəli dinamik balans modeli dayanır.

Açar sözlər: Leontyev modeli, xətti proqramlaşdırma məsələsi, parametrik məsələ, Pareto həll, Pareto sərhədi.

1. Giriş

Parametrik xətti proqramlaşdırma böyük ölçülü məsələ olduqda ölçünün yaratdığı problemləri onun standart yolla həlli zamanı aradan qaldırmaq daha da çətin olur. İşdə belə məsələlərdən birinə baxılır. Məsələnin böyük ölçülü olması iki səbəbdəndir. Birinci səbəb dəyişənlərinin sayının çox olmasıdır və bu dəyişənlərin əmsallarının məsələnin matrisindəki mövcud durumunun standart ayrılış sxemlərinin məsələnin həllində gözlənilən effektin alınması üçün əlverişli olmamasıdır. İkinci səbəb isə dəyişənlərin zamanın funksiyası olmasıdır. Məsələni diskret hala gətirən zaman yeni alınan məsələdəki dəyişənlərin sayı əvvəlki sayla zamanın bölgü nöqtələrinin sayının hasilinə bərabər olur. Nəticədə çox böyük ölçülü parametrik xətti proqramlaşdırma məsələsini həll etməli oluruq. Bu zaman həll prosesində qurulması tələb olunan optimal bazis həllərin sayı kəskin artır. Hər bir belə həll isə öz növbəsində böyük ölçülü xətti proqramlaşdırma məsələsinin həllini tələb edir, yəni çox böyük ölçülü simpleks cədvəlin Jourda-Qauss yoxetməsi ilə ardıcıl olaraq çox sayda çevrilməsini tələb edir. Təqdim olunan işdə məqsəd bu cür çevirmədən yan keçməklə məsələnin daha effektiv həll yolunu göstərməkdir. Təklif olunan həll sxemində tələb olunan hesablamaların əsas hissəsini sadə iterasiyadan çox da fərqlənməyən iterativ yolla icra edirik. Bu

yol isə bütün tələb olunan informasiyanın işləməsini paralel alqoritmlə icra etməyə imkan verir. Təklif olunan həll sxeminin ədədi misal üzərində icrası nümayiş etdirilir. Baxılan misal istifadə olunan həll sxeminin standart yolla həll sxemindən necə fərqləndiyi və onun daha effektiv olması haqda müəyyən müsbət fikir yaratmağa imkan verir.

2. Məsələnin qoyuluşu

Aşağıdakı formada təqdim olunan məsələyə baxırıq:

$$\begin{aligned} x^i &\leq A^i x^i + B^i (x^i - x^{i-1}) + b^{1i} + \lambda b^{2i}, \\ x^i &\leq d^{1i} + \lambda d^{2i}, \end{aligned} \quad (1)$$

$$x^i \geq 0, \quad i = \overline{1, r}, \quad 0 \leq \lambda \leq 1, \quad \Phi(x) = \sum_{i=1}^r c^i x^i \rightarrow \max.$$

Burada $I \in R^{n \times n}$ - vahid matrisdir; $A^i, B^i \in R^{n \times n}, c^i, d^{1i}, d^{2i}, b^{1i}, b^{2i}, x^i \in R^n, i = \overline{1, r}$.

Aşağıdakı şərtlərin ödənilməsi tələb olunur:

- 1) $A^i + B^i \geq 0$; 2) $(I - A^i - B^i)^{-1} \geq 0$; 3) $B^i (d^{1i} + \lambda d^{2i}) \leq b^{1i} + \lambda b^{2i}$;
- 4) $b^{1i} + \lambda b^{2i} \geq 0$; 5) $d^{1i} + \lambda d^{2i} \geq 0$; $c^i \geq 0$; $i = \overline{1, r}, 0 \leq \lambda \leq 1$.

Məsələ (1)-ə sahələrarası dinamik balans modeli əsasında qurulan xətti proqramlaşdırmanın parametrik məsələsi kimi də baxıla bilər. Bu halda λ - parametri sahələr üzrə istehsalın intensivliyinə qoyulan məhdudiyətlə və son məhsula tələbatla bağlı qeyri-müəyyənliyi əks etdirir. Statik halda və $\lambda = 0$ olduqda məsələ (1) [2]-də ətraflı öyrənilmişdir.

3. Həll sxeminin şərhı

Məsələ (1)-ə qoşma olan məsələyə baxaq:

$$y^i (I - A^i - B^i) + z^i \geq c^i, \quad y^i, z^i \geq 0, \quad i = \overline{1, r} \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^r y^i (b^{1i} + \lambda b^{2i} - B^i x^{i-1}) + \sum_{i=1}^r z^i (d^{1i} + \lambda d^{2i}) \rightarrow \min$$

$\bar{x}(\lambda) = (\bar{x}^1(\lambda), \bar{x}^2(\lambda), \dots, \bar{x}^r(\lambda))$ məsələ (1)-in optimal həlli olsun, yəni istənilən $\lambda^0 \in [0, 1]$ üçün $\bar{x}(\lambda^0)$ məsələ (1)-in $\lambda = \lambda_0$ olduqda optimal həllidir.

Fərz edək ki, optimal $x(\lambda), \lambda \in [0, 1]$ həllərinin hamısının koordinatları müsbətdir və onlar bazis dəyişənlərdir. Başqa sözlə $x(\lambda), \lambda \in [0, 1]$ nöqtələri məsələ (1)-in mümkün həllər çoxluğu X -in təpə nöqtələridir. $(\bar{x}^{1i}, \bar{x}^{2i}, \dots, \bar{x}^{ri}) = \bar{x}^i \in X, i = \overline{1, k}$ ilə bu təpə nöqtələrini işarə edək. $\Lambda_i \subset [0, 1]$ ilə \bar{x}^i -ni optimal edən $\lambda \in [0, 1]$ qiymətləri çoxluğunu işarə edək.

Onda yazıla bilər:

$$[0, 1] = \bigcup_{i=1}^k \Lambda_i.$$

Fərz edəcəyik ki,

$$\Lambda_i = [\lambda_i, \lambda_{i+1}), \quad i = \overline{1, k}, \quad (\lambda_1 = 0, \lambda_{k+1} = 1).$$

Onda məsələ (1)-in həllini (\bar{x}^i, Λ_i) , $i = \overline{1, k}$ kimi də təqdim edə bilərik. Məqsədimiz məsələ (1)-in $x(\lambda)$, $\lambda \in [0, 1]$ həllini (x^i, Λ_i) , $i = \overline{1, k}$ kimi göstərək. $x^i > 0$, $i = \overline{1, k}$ olduğundan məsələ (2)-ni ona ekvivalent formada xətti proqramlaşdırmanın ikinci teoreminə əsaslanaraq aşağıdakı kimi yazıla bilər:

$$y^i(I - A^i - B^i) + z^i = c^i, \quad y^i, z^i \geq 0, \\ \sum_{i=1}^r y^i(b^{1i} + \lambda b^{2i} - Bx^{i-1}) + \sum_{i=1}^r z^i(d^{1i} + \lambda d^{2i}) \rightarrow \min$$

Yeni alınmış məsələdən z^i , $i = \overline{1, r}$ dəyişənlərini kənarlaşdıraraq:

$$y^i(I - A^i - B^i) \leq c^i, \quad y^i \geq 0, \quad i = \overline{1, r}, \\ \sum_{i=1}^r y^i(b^{1i} - B^i x^{i-1} + \lambda b^{2i}) + \sum_{i=1}^r c^i - y^i(I - A^i - B^i)(d^{1i} + \lambda d^{2i}) \rightarrow \min.$$

Bu məsələni aşağıdakı kimi də yazıla bilər:

$$y^i(I - A^i - B^i) \leq c^i, \quad y^i \geq 0, \quad i = \overline{1, r}, \quad (3)$$

$$F(y, \lambda) = \sum_{i=1}^r y^i e^i + \sum_{i=1}^r c^i d^{1i} + \lambda \sum_{i=1}^r y^i f^i + \sum_{i=1}^r c^i d^{2i} \rightarrow \max, \quad 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Burada $e^i = (I - A^i - B^i)d^{1i} + B^i x^{i-1} - b^{1i}$, $f^i = (I - A^i - B^i)d^{2i} - b^{2i}$, $i = \overline{1, r}$.

$\lambda^0 \in [0, 1]$ üçün məsələ (3)-ün bazis optimal təpə nöqtəsini \bar{Y}^0 ilə işarə edək: $\bar{Y}^0 = (\bar{y}^1, \bar{y}^2, \dots, \bar{y}^r)$. Onda $\lambda = \lambda^0$ olduqda məsələ (1)-in aşağıdakı sistemdən optimal təpə nöqtəsini təyin edə bilərik (ikili teoremə əsaslanaraq).

$x_j^i = (A^i x^i + B^i(x^i - x^{i-1}) + b^{1i} + \lambda_0 b^{2i})_j$, $\bar{y}_j^i > 0$ olduqda,

$x_\eta^i = (d^{1i} + \lambda d^{2i})_\eta$, $\bar{y}_\eta^i = 0$ olduqda $i = \overline{1, r}$, $j, \eta = \overline{1, n}$.

Beləliklə, məsələ (1)-in həllini məsələ (3)-ün həllinə gətirmiş oluruq.

İki kriteriyalı

$$y^i(I - A^i - B^i) \leq c^i, \quad y^i \geq 0, \quad i = \overline{1, r}$$

$$y_1 = f_1(y) = \sum_{i=1}^r y^i e^i \rightarrow \max, \quad y_2 = f_2(y) = \sum_{i=1}^r y^i (e^i + f^i) \rightarrow \max. \quad (4)$$

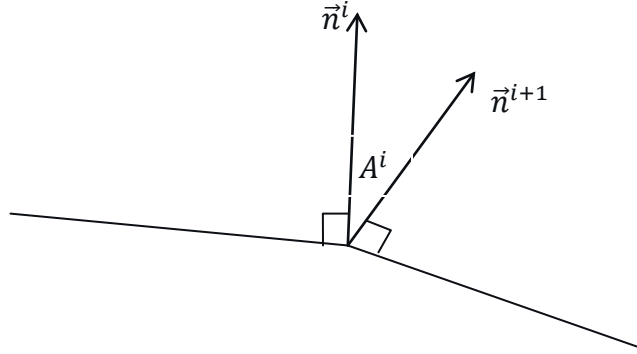
məsələsinə baxaq. Məsələnin mümkün həllər çoxluğunu Y ilə işarə edək. Onun Pareto sərhədini isə Y^P kimi işarə edək. Y^P sərhədi müstəvidə çökük ciddi azalan funksiyanın qrafikini ifadə edir. Bu qrafikin sol ucunu $L(y_1^p, y_2^p)$, sağ ucunu isə $S(y_1^s, y_2^s)$ kimi işarə edək. Onda aşağıdakı doğrudur.

$$y_2^p = \max_{y \in Y} f_2(y), \quad y_1^s = \max_{y \in Y} f_1(y).$$

Y^P hissə-hissə sınıq xəttidir. Onun sınıma nöqtələrini A^1, A^2, \dots, A^t kimi işarə edək. A^i sınıma nöqtəsini təyin edən bazis \bar{Y}^i təpə nöqtəsini götürək. Onda

A^i sınıma nöqtəsinə görə \bar{Y}^i -ni optimal edən λ -nın $[0, 1]$ -dəki bütün Λ_i qiymətləri çoxluğunu asanlıqla təyin edə bilərik:

$$\Lambda_i = \{\lambda \vec{n}^i + (1 - \lambda)n^{i+1} | 0 \leq \lambda \leq 1\}$$



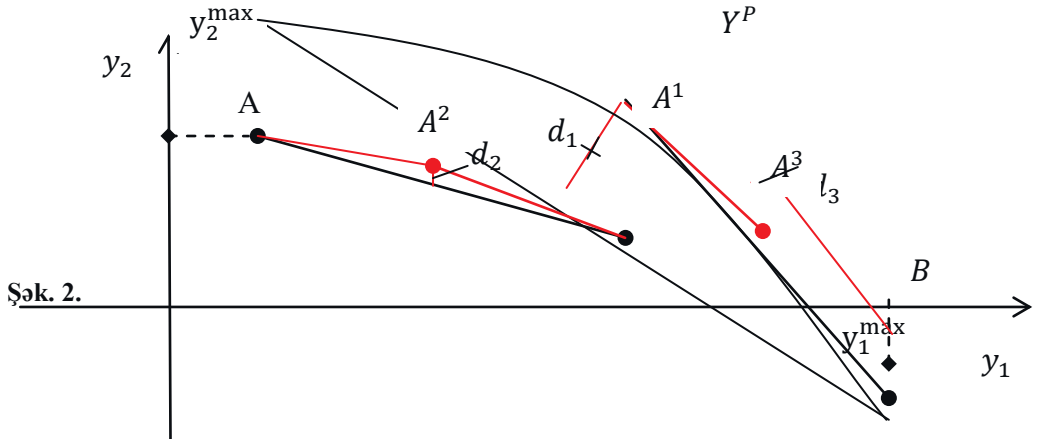
Şəkil 1.

Burada $\vec{n}^i = (n_1^i, n_2^i)$ və $n_1^i + n_2^i = 1$.

Pareto sərhəddi Y^P -nin qurulma sxeminin qrafiki şərh.

Sadəlik üçün Y^P sərhəddini hamar, çökük azalan funksiyanın qrafiki şəklində aşağıdakı kimi götürək və onun üzərində Y^P -nin qurulma sxemini şərh edək (bax şəkil 2).

Əvvəlcə $f_2(y) \rightarrow \max, y \in Y$ məsələsini həll edib onun optimal y_2^{op} həllinin köməyi ilə $A = (f_1(y_2^{op}), f_2(y_2^{op}))$ nöqtəsini qururuq. Anoloji olaraq $f_1(y) \rightarrow \max, y \in Y$ məsələsini həll etməklə B nöqtəsini qururuq. Y^P sərhəddini qərar qəbul edəni razı salan ε dəqiqliklə quracağıq. ε - dəqiqlik iki mənada təklif oluna bilər – müntəzəm yaxınlaşma mənasında və inteqral mənada [1]. Birinci mənaya görə şərhimizi davam etdirəcəyik.



Şəkil 2.

Addım 1. AB -yə perpendikulyar və Y^P -yə tərəf yönələn $\vec{n}^{(1)} = (n_1^{(1)}, n_2^{(1)})$ və $n_1^{(1)}, n_2^{(1)} \geq 0, n_1^{(1)} + n_2^{(1)} = 1$ vektorunu götürüb, onun əsasında

$$n_1^{(1)} f_1(y) + n_2^{(1)} f_2(y) \rightarrow \max, y \in Y$$

məsələsinin $y^{(1)}$ optimal həllinin köməyi ilə Y^P üzərindəki nöqtələrdən AB -dən ən uzaqda yerləşənini təyin edirik. Şək.2-də bu A^1 nöqtəsidir. $d_1 < \varepsilon$ olarsa, onda AA^1B sınıq xəttini Y^P -nin ε dəqiqliklə aproksimasiyasını qəbul edəcəyik və onu Y_ε^P kimi işarə edəcəyik. $d_1 > \varepsilon$ olduqda isə AA^1 və A^1B parçalarını AB kimi götürüb, addım 2-yə keçid alırıq.

Addım 2. AA^1 -dən maksimum uzaqlıqda və Y^P -də yerləşən A^2 nöqtəsini və bu xassəyə malik A^1B üçün A^3 nöqtələrini qururuq (bax şək. 2). A^2 -nin AA^1 -dən, A^3 -ün A^1B -dən məsafələrini uyğun olaraq d_1 və d_2 kimi adlandıraraq. Əgər d_1 və d_2 qiymətlərindən hər hansı biri ε -nu aşmazsa, onda bu hissəni Y_ε^P -nun bir hissəsi kimi qəbul edirik. Əks halda addım 1-i ödənilməyən hissə üçün davam etdiririk. $\max(d_2, d_3) < \varepsilon$ olduqda Y_ε^P olaraq $AA^2A^1A^3B$ sınıq xəttini qəbul edəcəyik. Şəkildən də görünür ki, d_i qiymətləri addımdan addıma azalır və bu azalma sürətlə baş verir. Y_ε^P -nun sınıma A^i nöqtələri üçün $\Lambda_i \subset [0,1], \Lambda_i \cap \Lambda_{i+1} = \emptyset$ kimi çoxluqları tərtib edib, sınıma nöqtələrini təqdim edən $\bar{y}^i \in Y$ bazis təpə nöqtələri ilə birlikdə düzələn (\bar{y}^i, Λ_i) , $i = \bar{1}, \bar{k}$ çütlər çoxluğunu verilmiş məsələnin həlli kimi qəbul edirik. Y_ε^P -nun sınıma nöqtələri nə qədər az olsa, məsələ bir o qədər az hesablama tələb edəcəkdir. Bu say isə ε -da asılı olaraq dəyişə bilər.

4. Ədədi misal

Məsələ (1) üçün ədədi verilənləri aşağıdakı kimi götürək:

$$A^1 = A^2 = A = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.1 & 0.0 \\ 0.0 & 0.2 & 0.3 \end{pmatrix}, \quad B^1 = B^2 = B = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.0 & 0.2 \end{pmatrix}$$

$$d^{11} = \begin{pmatrix} 40 \\ 10 \\ 30 \end{pmatrix}, \quad d^{12} = \begin{pmatrix} 10 \\ 50 \\ 30 \end{pmatrix}, \quad b^{11} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad b^{12} = \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ 15 \end{pmatrix},$$

$$d^{21} = \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 40 \end{pmatrix}, \quad d^{22} = \begin{pmatrix} 50 \\ 10 \\ 50 \end{pmatrix}, \quad b^{21} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad b^{22} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix},$$

$$c^1 = (4 \quad 1 \quad 2), \quad c^2 = (3 \quad 2 \quad 1).$$

(1)- (4) şərtlərinin ödənilməsi asanlıqla yoxlanılır.

Verilənlərə uyğun məsələ (1)-ə qoşma olan məsələ (3)-ü tərtib edək. Bu məsələdə aşağıdakı ifadələri ilkin verilənlərə əsasən hesablayaq.

$$I - A - B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.1 & 0.1 \\ 0.0 & 0.2 & 0.3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.2 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.0 & 0.2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 0.7 & -0.3 & -0.2 \\ -0.4 & 0.7 & -0.1 \\ -0.1 & -0.2 & 0.5 \end{pmatrix} \\
e^1 &= (I - A^1 - B^1)d^{11} + B^1x^0 - b^{11} = (I - A - B)d^{11} - b^{11} = \\
&= \begin{pmatrix} 0.7 & -0.3 & -0.2 \\ -0.4 & 0.7 & -0.1 \\ -0.1 & -0.2 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 40 \\ 10 \\ 30 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -22 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad x^0 = 0, \quad e^1 = \begin{pmatrix} 9 \\ -22 \\ -1 \end{pmatrix}. \\
e^2 &= \begin{pmatrix} 0.7 & -0.3 & -0.2 \\ -0.4 & 0.7 & -0.1 \\ -0.1 & -0.2 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 50 \\ 30 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ 15 \end{pmatrix} + Bx^1 = \begin{pmatrix} -34 \\ -2 \\ -11 \end{pmatrix} + Bx^1.
\end{aligned}$$

x^1 –in hesablanması. X^1 –i hesablamaq üçün $\lambda = 0$ olmaqla məsələ (3)-dən alınan

$$y^1 = (I - A^1 - B^1) \leq c^1, \quad y^1 \geq 0, \quad y^1 e^1 \rightarrow \max$$

məsələsini həll edirik və onun optimal bazisini qururuq.

$$\begin{aligned}
0.7y_1^1 - 0.4y_2^1 - 0.1y_3^1 &\leq 4, \\
-0.3y_1^1 + 0.7y_2^1 - 0.2y_3^1 &\leq 1, \\
-0.2y_1^1 - 0.1y_2^1 + 0.5y_3^1 &\leq 2, \\
y_1^1 \geq 0, \quad y_2^1 \geq 0, \quad y_3^1 \geq 0, \\
9y_1^1 - 22y_2^1 - y_3^1 &\rightarrow \max.
\end{aligned}$$

y_1^1, y_2^1, y_3^1 dəyişənlərində y_1^1, y_3^1 dəyişənləri optimal bazis dəyişənləridir.

Optimal \bar{y}^1 həllin \bar{y}_1^1, \bar{y}_3^1 kordinatları isə

$$\begin{aligned}
0.7y_1^1 - 0.1y_3^1 &= 4, \\
-0.2y_1^1 + 0.5y_3^1 &= 2.
\end{aligned}$$

sistemindən $\bar{y}_1^1 = \frac{20}{3}$, $\bar{y}_3^1 = \frac{20}{3}$ olaraq alırıq. Xətti proqramlaşmanın ikinci ikili teoreminə əsasən x^1 –in koordinatlarını

$$\begin{aligned}
0.7x_1^1 - 0.2x_3^1 &= 3 + 10, \\
-0.2x_1^1 + 0.5x_3^1 &= 2 + 10
\end{aligned}$$

sistemindən $x_1^1 = 25\frac{2}{7}$, $x_2^1 = 10$, $x_3^1 = 24$ olaraq tapırıq. Onda

$$e^2 = \begin{pmatrix} -34 \\ -2 \\ -11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.2 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.0 & 0.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 25\frac{2}{7} \\ 10 \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -34 \\ -2 \\ -11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8.46 \\ 6.93 \\ 7.33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -25.54 \\ 4.93 \\ -3.67 \end{pmatrix}$$

f_1 və f_2 –ni hesablayaq:

$$\begin{aligned}
f^1 &= (I - A - B)d^{21} - b^{21} = \begin{pmatrix} 0.7 & -0.3 & -0.2 \\ -0.4 & 0.7 & -0.1 \\ -0.1 & -0.2 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 40 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} -10 \\ 13 \\ 13 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

$$f^2 = (I - A - B)d^{22} - b^{22} = \begin{pmatrix} 0.7 & -0.3 & -0.2 \\ -0.4 & 0.7 & -0.1 \\ -0.1 & -0.2 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 50 \\ 10 \\ 50 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 22 \\ -18 \\ 18 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ -23 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Beləliklə, ədədi verilənlərlə məsələ (3)-ü aşağıdakı kimi yazı bilərik:

$$\begin{aligned} 0.7y_1^1 - 0.4y_2^1 - 0.1y_3^1 &\leq 4, & y_1^1 &\geq 0 \\ -0.3y_1^1 + 0.7y_2^1 - 0.2y_3^1 &\leq 1, & y_2^1 &\geq 0 \\ -0.2y_1^1 - 0.1y_2^1 + 0.5y_3^1 &\leq 2, & y_3^1 &\geq 0 \\ 0.7y_1^2 - 0.4y_2^2 - 0.1y_3^2 &\leq 3, & y_1^2 &\geq 0 \\ -0.3y_1^2 + 0.7y_2^2 - 0.2y_3^2 &\leq 2, & y_2^2 &\geq 0 \\ -0.2y_1^2 - 0.1y_2^2 + 0.5y_3^2 &\leq 1, & y_3^2 &\geq 0 \\ 9y_1^1 - 22y_2^1 - y_3^1 - 25.54y_1^2 + 4.93y_2^2 - 3.67y_3^2 + \\ + \lambda(-20y_1^1 + 3y_2^1 + 3y_3^1 + 17y_1^2 - 23y_2^2 + 8y_3^2) &\rightarrow \max \end{aligned}$$

İndi isə məsələ (4)-ün ədədi verilənlərlə ifadəsini yazaq:

Əvvəlcə $e^i + f^i, i = 1, 2$ ifadələrini hesablayırıq:

$$e^1 + f^1 = \begin{pmatrix} 9 \\ -22 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -20 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ -19 \\ 2 \end{pmatrix}, \\ e^2 + f^2 = \begin{pmatrix} -25.54 \\ 4.93 \\ -3.67 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 17 \\ -23 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8.54 \\ -18.73 \\ 4.33 \end{pmatrix}$$

Onda məsələ (4) aşağıdakı kimi iki kriteriyalı məsələ olacaqdır.

$$\begin{aligned} 0.7y_1^1 - 0.4y_2^1 - 0.1y_3^1 &\leq 4, & y_1^1 &\geq 0 \\ -0.3y_1^1 + 0.7y_2^1 - 0.2y_3^1 &\leq 1, & y_2^1 &\geq 0 \\ -0.2y_1^1 - 0.1y_2^1 + 0.5y_3^1 &\leq 2, & y_3^1 &\geq 0 \\ 0.7y_1^2 - 0.4y_2^2 - 0.1y_3^2 &\leq 3, & y_1^2 &\geq 0 \\ -0.3y_1^2 + 0.7y_2^2 - 0.2y_3^2 &\leq 2, & y_2^2 &\geq 0 \\ -0.2y_1^2 - 0.1y_2^2 + 0.5y_3^2 &\leq 1, & y_3^2 &\geq 0 \\ y_1 = f_1(y) = 9y_1^1 - 22y_2^1 - y_3^1 - 25.54y_1^2 + 4.93y_2^2 - 3.67y_3^2 &\rightarrow \max, \\ y_2 = f_2(y) = -11y_1^1 - 19y_2^1 + 2y_3^1 - 8.54y_1^2 - 18.73y_2^2 + 4.33y_3^2 &\rightarrow \max. \end{aligned} \tag{5}$$

Y məsələ (5)-in mümkün həlləri çoxluğu olsun. Məsələnin qiymətləndirmələr çoxluğu

$$Z = \{(y_1, y_2) | y_1 = f_1(y), y_2 = f_2(y), y \in Y\} \subset R^2$$

müstəvidə çoxbucaqlı təyin edəcəkdir. Bu çoxbucaqlının sərhədinin bir hissəsi $(y_1, y_2) \in Z, y_1 \rightarrow \max, y_2 \rightarrow \max$ məsələsinin Pareto sərhədi Z^P -ni ifadə edəcəkdir. Bu sərhəd hissə-hissə xətti, kəsilməz, ciddi azalan və çökük funksiyanın qrafikini təqdim edəcəkdir. Bu qrafikin sağ ucunu A , sol ucunu B kimi işarə edək və bu nöqtələri quraq.

$\max_{y \in Z} f_1(y) = f_1(y^0) = y_1^0, \max_{y \in X} f_2(y) = f_2(y^*) = y_2^*$ olsun.

Onda $f_2(y^0) = y_2^0, f_1(y^*) = y_1^*$ olduğunu qəbul etsək $A = (y_1^0, y_2^0),$

$B = (y_1^*, y_2^*)$ uc nöqtələrini qurmuş oluruq.

$\max_{y \in Z} f_1(y)$ məsələsinin optimal y^0 həllini aşağıdakı tənliklər sisteminin həllindən tapırıq:

$$0.7y_1^1 - 0.1y_3^1 = 4,$$

$$-0.2y_1^1 + 0.5y_3^1 = 2,$$

$$y_2^1 = 0,$$

$$0.7y_2^2 = 2$$

$$y_1^2 = 0,$$

$$y_3^2 = 0,$$

$$y^0 = \left(\frac{20}{3}, 0, \frac{20}{3}, 0, \frac{20}{7}, 0 \right).$$

y^0 -in ifadəsini $f_1(y)$ və $f_2(y)$ -də y -in yerinə yazıb $A(y_1^0 y_2^0)$ nöqtəsinin R^2 -dəki yerini təyin edək.

$$y_1^0 = 9 \frac{20}{3} - \frac{20}{3} + 4.93 \frac{20}{7} = 68 \frac{4}{21},$$

$$y_1^0 = -11 \frac{20}{3} + 2 \frac{20}{3} - 18.73 \frac{20}{7} = -113 \frac{18}{35},$$

$$A = \left(68 \frac{4}{21}, -113 \frac{18}{35} \right).$$

$\max_{y \in Z} f_2(y)$ məsələsinin optimal y^* həllini

$$0.5y_3^1 = 2,$$

$$y_1^1 = 0,$$

$$y_2^1 = 0,$$

$$0.5y_3^2 = 1$$

$$y_1^2 = 0,$$

$$y_2^2 = 0,$$

sisteminin həllindən tapırıq.

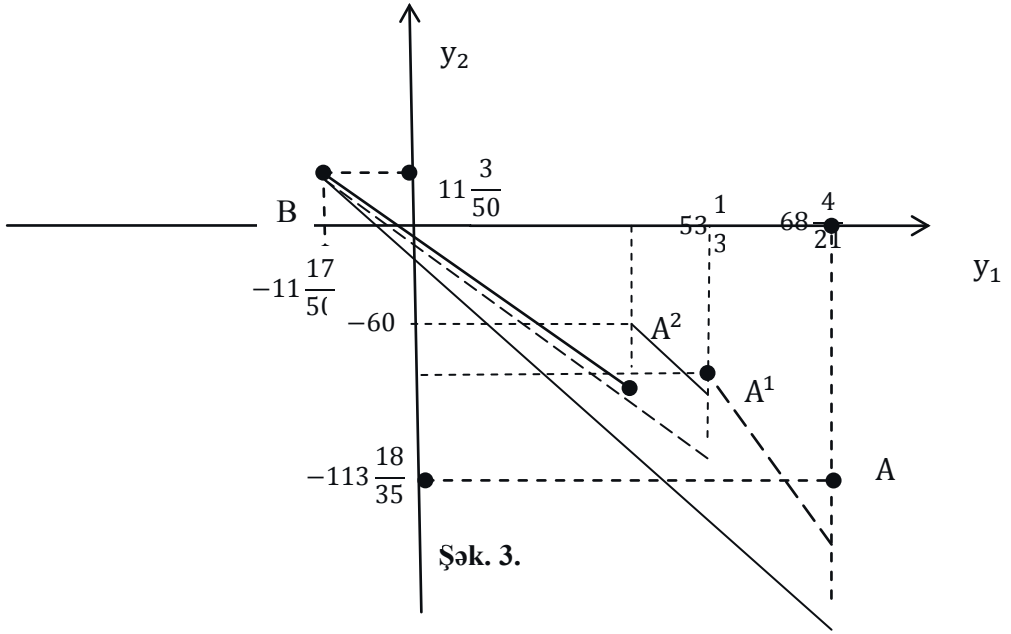
$$y^* = (0, 0, 4, 0, 0, 2).$$

Onda,

$$y_1^* = f_1(y^*) = -4 - 3.67 \cdot 2 = -11.34,$$

$$y_2^* = f_2(y^*) = 2 \cdot 4 + 4.33 \cdot 2 = 11.06$$

$$B = (-11.34, 11.06).$$



Şək. 3.

A və B nöqtələrini qurmaqla həll prosesinin ilk addımını bitmiş hesab edəcəyik. Növbəti addımda Pareto sərhəddi Z^P üzərində olub AB –dən maksimum uzaqlıqda olan A^1 nöqtəsini quracağıq. Qurmanı [2]-dəki sxemə nəzərən icra edəcəyik. Əvvəlcə

$$\vec{AB} = \left(-11,34 - 68 \frac{4}{21}, 11,06 + 113 \frac{18}{35} \right) = (-79,5 \quad 124,6)$$

Sonra isə

$$y \in Z, \quad 124,6 \cdot y_1 + 79,5y_2 \rightarrow \max$$

məsələsinin optimal y^{op} həllindən istifadə edərək A^1 nöqtəsi alaraq $(f_1(y^{op}), f_2(y^{op}))$ nöqtəsini götürürük.

$$\begin{aligned} 124,6 \cdot y_1 + 79,5y_2 &= 124,6(9y_1^1 - 22y_2^1 - y_3^1 - 25,54y_1^2) + \\ &+ 4,93y_2^2 - 3,67y_3^2 + 79,5(-11y_1^1 - 19y_2^1 + 2y_3^1 - 8,54y_1^2 - \\ &- 18,73y_2^2 + 4,33y_3^2) = 247y_1^1 - 4252y_2^1 + 34,4y_3^1 - \\ &- 3861y_1^2 - 874y_2^2 - 113y_3^2. \end{aligned}$$

Beləliklə,

$$y \in Z, \quad 247y_1^1 - 4252y_2^1 + 34,4y_3^1 - 3861y_1^2 - 874y_2^2 - 113y_3^2 \rightarrow \max$$

məsələsinin optimal $y^0 = \left(\frac{20}{3}, 0, \frac{20}{3}, 0, 0, 0 \right)$ həllini $(f_1(y^{op}), f_2(y^{op}))$ –də yerinə yazıb $A^1 = \left(53 \frac{1}{3}, -60 \right)$ nöqtəsini qururuq.

İndi isə AB –ni A^1B ilə əvəz edib AB üçün olan əməliyyatı A^1B üçün icra edirik.

$$\vec{AA^1} = \left(53 \frac{1}{3} - 68 \frac{4}{21}, -60 + 113 \frac{18}{35} \right) = \left(-15, 53 \frac{1}{2} \right)$$

Pareto sərhədinin növbəti sınıma nöqtəsini tapmaq üçün

$53.5y_1 + 15y_2 \rightarrow \max, \quad (y_1, y_2) \in Z$
məsələsinin optimal həllini hesablasaq alırıq:

$$y^{op} = \left(\frac{20}{3}, 0, \frac{20}{3}, 0, 0, 0 \right)$$

y^{op} –nin bu ifadəsini $(f_1(y^{op}), f_2(y^{op}))$ –da yerinə yazıb yeni

$A^2 = (41.5, -51.3)$ alırıq. Sonrakı hesablamaların yeni sınıma nöqtəsi verilmədiyindən Z^P –nin BA^2A^1A sınıq xəttindən təşkil olunduğunu alırıq.

ƏDƏBİYYAT

1. Федосеев В.В. Экономико-математические методы и прикладные модели. – Москва: ЮНИТИ, - 2000, - 391с.
2. Мееров М.В. Исследование и оптимизации многосвязанных систем управления. – Москва: Наука, - 1986.

ОБ ОДНОЙ БОЛЬШОЙ ЗАДАЧЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ И ЕЁ РЕШЕНИЕ

Р.Г.ГАМИДОВ, Н.К.АЛЛАХВЕРДИЕВА

РЕЗЮМЕ

Большой размерность параметрической задачи требует нестандартные, специальные подходы для её решения. Часто, такой подход разрабатывается с учетом специальной структуры решаемой задачи. В работе исследуется большая параметрическая задача линейного программирования, которая имеет практическая значимость. На основе задачи лексит известная динамическая модель межотраслевого баланса Леонтьева.

Ключевые слова: модель Леонтьева, задача линейного программирования, параметрическая задача, Парето решение, Парето границы.

ON SOLUTION OF ONE LARGE-SCALE PARAMETRIC PROGRAMMING

R.H.HAMIDOV, N.K.ALLAHVERDIYEVA

SUMMARY

The large parametric programming problems requires non-standart special approaches to its solution. In most cases such an approach is implemented taking into account the specific structure of the problem to be solved. One large-scale linear parametric problem of the practical application is considered. The issue is based on Leontiyev's well known inter- sectoral dynamic balance model.

Keywords: Leontiyev's model, linear programming problem, parametric problem, Pareto solution, Pareto boundary

UOT 514.763

**(0,2) TIPLİ TENZOR REPERLƏRİNİN LAYLANMASINDA
BƏZİ STRUKTURLARIN TƏDQIQI****H.D.FƏTTAYEV, A.B.BƏŞİRLİ***Bakı Dövlət Universiteti**h-fattayev@mail.ru**ayten.bashirli1997@gmail.com*

İşdə (0,2) tipli tenzor reperlərinin laylanması təyin olunur, bazada verilən vektor meydanlarının bu laylanma fəzasına tam və horizontal liftləri qurulur, onların əsas xassələri və aralarındakı əsas münasibət öyrənilir.

Açar sözlər: tenzor reperi, afin rabitə, laylanma, horizontal lift, əyrilik tenzoru, kommutator.

1. Giriş

Diferensiallanan çoxobrazlı üzərində reperlərin və koreperlərin, o cümlədən afinor ((1,1) tipli tenzor) reperlərinin laylanmalarında müxtəlif strukturların tədqiqi Mok, Kordero, de Leok, Səlimov, Fəttayev və başqalarının işlərində aparılmışdır (bax, məsələn, [1],[2],[3],[4]). Təqdim olunan işin əsas məqsədi (0,2) tipli tenzor reperlərinin laylanmasının təyin olunması və bu laylanmada vektor meydanlarının liftlərini öyrənməkdən ibarətdir.

İkinci bölməsində diferensiallanan çoxobrazlı üzərində (0,2) tipli tenzor reperlərinin laylanması təyin olunur. Üçüncüdə vektor meydanlarının (0,2) tipli tenzor reperlərinin laylanmasına tam lifti ilə bağlı məsələyə baxılır, tam liftin xassələri öyrənilir. Dördüncü bölmədə bazada verilən vektor meydanlarının (0,2) tipli tenzor reperlərinin laylanmasının horizontal lifti qurulur, xassələri tədqiq olunur.

Məqalədə baxılan çoxobrazlıların və onlar üzərindəki strukturların C^∞ sinifindən olması nəzərdə tutulur. A,B,C,... indekslərinin birdən $n + n^4$ -ə qədər, $i, j, k, \dots, \alpha, \beta, \gamma, \dots$ indekslərinin 1-dən n -ə qədər, $i_{\alpha_1\alpha_2}, j_{\beta_1\beta_2}, k_{\gamma_1\gamma_2}, \dots$ indekslərinin isə $n + 1$ -dən $n + n^4$ -ə qədər qiymətlər alırlar. M çoxobrazlısı üzərində lokal koordinat sistemi (U, x^i) şəklində yazılır, burada U – koordinat ətrafıdır, x^i – lokal koordinatdır. $\frac{\partial}{\partial x^i}$ xüsusi diferensiallanma qısa-

lıq xətinə ∂_i şəklində yazılır. V, W vektor meydanlarının kommutatoru $[V, W]$ kimi işarə olunur.

2. (0,2) tipli tenzor reperlərinin laylanması

C^∞ sinfindən olan hamar M çoxobrazlısına baxaq və fərz edək ki, $T_2^0(x)$ - $x \in M$ nöqtəsində (0,2) tipli tenzorlar fəzasıdır. $T_2^0(x)$ xətti fəzasının $(X^{11}, \dots, X^{1n}, \dots, X^{n1}, \dots, X^{nn}) = A_x$ bazisini (0,2) tipli tenzor reperi adlandırırıq. M hamar çoxobrazlısının bütün nöqtələrində bütün (0,2) tipli tenzor reperlərinin çoxluğunu $L_2^0(M)$ simvolye ilə işarə edirik. Təbii $\pi: L_2^0(M) \rightarrow M$ proyeksiyası $A_x \rightarrow x$ şəklində təyin olunur. $L_2^0(M)$ çoxluğunda $n + n^4$ ölçülü, C^∞ sinfindən olan hamar çoxobrazlı strukturu aşağıdakı kimi daxil edilir.

Fərz edək ki, (U, x^i) M hamar çoxobrazlısı üzərində lokal koordinat sistemidir. Onda $L_2^0(U) = \pi^{-1}(U)$ çoxluğu U ətrafının bütün nöqtələrindəki bütün (0,2) tipli tenzor reperlərini öz daxilində saxlayır. $A_x \in L_2^0(U)$ tenzor reperi birqiyəmətli olaraq

$$X^{\alpha_1 \alpha_2} = X_{i_1 i_2}^{\alpha_1 \alpha_2} (dx^{i_1})_x \otimes (dx^{i_2})_x$$

şəklində ayırmaq olar. Buradan belə bir nəticəyə gəlirik ki, $\{L_2^0(U), (x^i, X_{i_1 i_2}^{\alpha_1 \alpha_2})\}$ - $L_2^0(U)$ çoxluğu üzərində lokal koordinat sistemidir. Bu koordinat sistemini doğrulmuş koordinat sistemi adlandırırıq. Tutaq ki, (U, x^i) və $(U', x^{i'})$ - M hamar çoxobrazlısı üzərində $U \cap U'$ kəsişməsində

$$x^{i'} = x^{i'}(x^1, \dots, x^n) \quad (2.1)$$

çevrilməsi ilə əlaqəli olan lokal koordinat sistemləridir. Onda $L_2^0(U) \cap L_2^0(U')$ kəsişməsində $\{L_2^0(U), (x^i, X_{i_1 i_2}^{\alpha_1 \alpha_2})\}$ və $\{L_2^0(U'), (x^{i'}, X_{i'_1 i'_2}^{\alpha_1 \alpha_2})\}$ doğrulmuş koordinat sistemləri

$$\begin{cases} x^{i'} = x^{i'}(x^1, \dots, x^n) \\ X_{i'_1 i'_2}^{\alpha_1 \alpha_2} = A_{i'_1}^{i_1} A_{i'_2}^{i_2} X_{i_1 i_2}^{\alpha_1 \alpha_2} \end{cases} \quad (2.2)$$

çevrilmələri ilə əlaqəli olar, burada $A_{i'}^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}$ - (2.1) çevrilməsinin tərsi olan

$$x^i = x^i(x^{1'}, \dots, x^{n'})$$

çevrilməsinin Yakobi matrisinin elementləridir. Aparılan mühakimələrdən aydın olur ki, $L_2^0(M)$ - $(n + n^4)$ - ölçülü, C^∞ sinfindən olan hamar çoxobrazlıdır, $(L_2^0(M), \pi, M)$ üçlüyü isə laylanmadır. Bu laylanmanı (0,2) tipli tenzor reperlərinin laylanması adlandırırıq.

Sadəlik üçün $(x^I) = (x^i, x^{i_{\alpha_1 \alpha_2}}) = (x^i, X_{i_1 i_2}^{\alpha_1 \alpha_2})$ işarələməsini daxil edirik. Buradan aydın olur ki,

$$\begin{aligned} i, j, k, \dots, \alpha, \beta, \gamma, \dots &= 1, 2, \dots, n; i_{\alpha_1 \alpha_2}, j_{\beta_1 \beta_2}, k_{\gamma_1 \gamma_2}, \dots \\ &= n + 1, n + 2, \dots, n + n^4; I, J, K, \dots = 1, 2, \dots, n + n^4. \end{aligned}$$

(2.2) çevrilməsinin Yakobi matrisi aşağıdakı struktura malikdir:

$$(A_I^{I'}) = \left(\frac{\partial x^{I'}}{\partial x^I} \right) = \begin{pmatrix} A_i^{i'} & 0 \\ \partial_i (A_{i_1}^{i_1'} A_{i_2}^{i_2'}) X_{i_1 i_2}^{\alpha_1 \alpha_2} & A_{i_1' i_2'}^{\alpha_1 \alpha_2} \delta_{\sigma_1}^{\alpha_1} \delta_{\sigma_2}^{\alpha_2} \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

3. Vektor meydanlarının tam lifti

Tutaq ki, $V - M$ hamar çoxobrazlısının üzərində verilmiş vektor meydanıdır və $V = V^i \partial_i$, yəni $V^i - U$ koordinat ətrafında V vektor meydanının komponentləridir.

Teorem 3.1.

$${}^c V = ({}^c V^i, {}^c V^{i\alpha_1\alpha_2}) = (V^i, -X_{m i_2}^{\alpha_1 \alpha_2} \partial_{i_1} V^m - X_{i_1 m}^{\alpha_1 \alpha_2} \partial_{i_2} V^m) \quad (3.1)$$

obyekti $(0,2)$ tipli $L_2^0(M)$ tenzor reperlərinin laylanması üzərində vektor qanunu ilə çevrilir.

İsbatı. Göstərməliyik ki, (2.2) çevrilməsi zamanı

$${}^c V^{I'} = A_I^{I'} {}^c V^I \quad (3.2)$$

bərabərliyi ödənilir. Əvvəlcə $I' = i'$ halına nəzər yetirək. Bu halda (3.2) bərabərliyinin sağ tərəfindəki ifadəni aşağıdakı kimi çevirmək olar:

$$A_I^{i'} {}^c V^I = A_i^{i'} {}^c V^i + A_{i\alpha_1\alpha_2}^{i'} {}^c V^{i\alpha_1\alpha_2} = A_i^{i'} V^i = V^{i'} = {}^c V^{i'},$$

Başqa sözlə desək, (3.2) bərabərliyi ödənilir.

$I' = i'\alpha_1\alpha_2$ halında isə (3.2) bərabərliyinin sol tərəfi üçün yaza bilərik:

$$\begin{aligned} {}^c V^{i'} &= {}^c V^{i\alpha_1\alpha_2} = -X_{m' i_2'}^{\alpha_1 \alpha_2} \partial_{i_1'} V^{m'} - X_{i_1' m'}^{\alpha_1 \alpha_2} \partial_{i_2'} V^{m'} = -X_{m' i_2'}^{\alpha_1 \alpha_2} (\partial_{i_1'} V^m) A_m^{m'} \\ &\quad - X_{m' i_2'}^{\alpha_1 \alpha_2} V^m \partial_{i_1'} A_m^{m'} - X_{i_1' m'}^{\alpha_1 \alpha_2} (\partial_{i_2'} V^m) A_m^{m'} - X_{i_1' m'}^{\alpha_1 \alpha_2} V^m \partial_{i_2'} A_m^{m'} \\ &= \sum_{k=1}^4 a_k, \end{aligned}$$

burada

$$a_1 = -X_{m' i_2'}^{\alpha_1 \alpha_2} (\partial_{i_1'} V^m) A_m^{m'},$$

$$a_2 = -X_{m' i_2'}^{\alpha_1 \alpha_2} V^m \partial_{i_1'} A_m^{m'},$$

$$a_3 = -X_{i_1' m'}^{\alpha_1 \alpha_2} (\partial_{i_2'} V^m) A_m^{m'},$$

$$a_4 = -X_{i_1' m'}^{\alpha_1 \alpha_2} V^m \partial_{i_2'} A_m^{m'}.$$

Digər tərəfdən, baxılan halda (3.2) bərabərliyinin sağ tərəfindəki ifadəni aşağıdakı kimi çevirmək olar:

$$\begin{aligned} A_I^{i'} {}^c V^I &= A_i^{i\alpha_1\alpha_2} {}^c V^i + A_{i\sigma_1\sigma_2}^{i\alpha_1\alpha_2} {}^c V^{i\sigma_1\sigma_2} \\ &= \partial_i (A_{i_1}^{i_1'} A_{i_2}^{i_2'}) X_{i_1 i_2}^{\alpha_1 \alpha_2} V^i + A_{i_1' i_2'}^{\alpha_1 \alpha_2} \delta_{\sigma_1}^{\alpha_1} \delta_{\sigma_2}^{\alpha_2} (-X_{m i_2}^{\sigma_1 \sigma_2} \partial_{i_1} V^m) \\ &\quad + A_{i_1' i_2'}^{\alpha_1 \alpha_2} \delta_{\sigma_1}^{\alpha_1} \delta_{\sigma_2}^{\alpha_2} (-X_{i_1 m}^{\sigma_1 \sigma_2} \partial_{i_2} V^m) = \sum_{l=1}^4 b_l, \end{aligned}$$

burada

$$\begin{aligned} b_1 &= X_{i_1 i_2}^{\alpha_1 \alpha_2} (\partial_i A_{i_1'}^{i_1}) A_{i_2'}^{i_2} V^i, \\ b_2 &= X_{i_1 i_2}^{\alpha_1 \alpha_2} A_{i_1'}^{i_1} (\partial_i A_{i_2'}^{i_2}) V^i, \\ b_3 &= -X_{m i_2}^{\alpha_1 \alpha_2} A_{i_1'}^{i_1} A_{i_2'}^{i_2} \partial_{i_1} V^m, \\ b_4 &= -X_{i_1 m}^{\alpha_1 \alpha_2} A_{i_1'}^{i_1} A_{i_2'}^{i_2} \partial_{i_2} V^m \end{aligned}$$

işarə olunmuşdur. Asanlıqla yoxlanılır ki,

$$a_1 = b_3, \quad a_2 = b_1, \quad a_3 = b_4, \quad a_4 = b_2. \quad (3.3)$$

(3.3) münasibətləri (3.2) bərabərliyinin ödənildiyini göstərir. Beləliklə, ${}^c V - L_2^0(M)$ laylanmasının üzərində təyin olunmuş tenzor meydanıdır. Teorem isbat olundu.

${}^c V$ vektor meydanına V vektor meydanının $L_2^0(M)$ laylanmasına V vektor meydanının tam lifti deyəcəyik.

Teorem 3.2. *İstənilən $V, W \in T_0^1(M)$ vektor meydanları üçün*

$${}^c[V, W] = [{}^c V, {}^c W] \quad (3.4)$$

bərabərliyi doğrudur.

İsbatı. Göstərəcəyik ki,

$${}^c[V, W]^I = [{}^c V, {}^c W]^I. \quad (3.5)$$

$I = i$ halında (3.5) bərabərliyinin sağ tərəfi aşağıdakı kimi çevrilər:

$$\begin{aligned} [{}^c V, {}^c W]^I &= [{}^c V, {}^c W]^i = {}^c V^L \partial_L {}^c W^i - {}^c W^L \partial_L {}^c V^i \\ &= {}^c V^l \partial_l {}^c W^i + {}^c V^{l \gamma_1 \gamma_2} \partial_{l \gamma_1 \gamma_2} {}^c W^i - {}^c W^l \partial_l {}^c V^i \\ &\quad - {}^c W^{l \gamma_1 \gamma_2} \partial_{l \gamma_1 \gamma_2} {}^c V^i = V^l \partial_l W^i - W^l \partial_l V^i = [V, W]^i \\ &= {}^c[V, W]^i, \end{aligned}$$

yəni baxılan halda (3.5) bərabərliyi ödənilir.

$I = i_{\alpha_1 \alpha_2}$ halına baxaq. Bu halda (3.5) bərabərliyinin sol tərəfi aşağıdakı ifadəyə çevrilmiş olur:

$$\begin{aligned} {}^c[V, W]^I &= {}^c[V, W]^{i_{\alpha_1 \alpha_2}} = \\ &= -X_{m i_2}^{\alpha_1 \alpha_2} \partial_{i_1} (V^l \partial_l W^m - W^l \partial_l V^m) - X_{i_1 m}^{\alpha_1 \alpha_2} \partial_{i_2} (V^l \partial_l W^m - W^l \partial_l V^m). \end{aligned}$$

Asanlıqla müəyyən etmək olur ki, sonuncu ifadə aşağıdakı hədlərin cəminə bərabərdir:

$$\begin{aligned} c_1 &= -X_{m i_2}^{\alpha_1 \alpha_2} (\partial_{i_1} V^l) \partial_l W^m, \\ c_2 &= -X_{m i_2}^{\alpha_1 \alpha_2} V^l \partial_{i_1} \partial_l W^m, \\ c_3 &= X_{m i_2}^{\alpha_1 \alpha_2} (\partial_{i_1} W^m) \partial_l V^m, \\ c_4 &= X_{m i_2}^{\alpha_1 \alpha_2} (\partial_{i_1} \partial_l V^m) W^l, \\ c_5 &= -X_{i_1 m}^{\alpha_1 \alpha_2} (\partial_{i_2} V^l) \partial_l W^m, \\ c_6 &= -X_{i_1 m}^{\alpha_1 \alpha_2} V^l \partial_{i_2} \partial_l W^m, \end{aligned}$$

$$c_7 = X_{i_1 m}^{\alpha_1 \alpha_2} (\partial_{i_2} W^l) \partial_l V^m,$$

$$c_8 = X_{i_1 m}^{\alpha_1 \alpha_2} W^l \partial_{i_2} \partial_l V^m.$$

Digər tərəfdən (3.5) bərabərliyinin sağ tərəfindəki ifadəni aşağıdakı şəkildə yazmaq mümkündür:

$$\begin{aligned} [{}^c V, {}^c W]^l &= [{}^c V, {}^c W]^{i_1 \alpha_1 \alpha_2} = {}^c V^L \partial_L {}^c W^{i_1 \alpha_1 \alpha_2} - {}^c W^L \partial_L {}^c V^{i_1 \alpha_1 \alpha_2} \\ &= {}^c V^l \partial_l {}^c W^{i_1 \alpha_1 \alpha_2} + {}^c V^{l \gamma_1 \gamma_2} \partial_{l \gamma_1 \gamma_2} {}^c W^{i_1 \alpha_1 \alpha_2} - {}^c W^l \partial_l {}^c V^{i_1 \alpha_1 \alpha_2} \\ &\quad - {}^c W^{l \gamma_1 \gamma_2} \partial_{l \gamma_1 \gamma_2} {}^c V^{i_1 \alpha_1 \alpha_2} \\ &= V^l \partial_l \left(-X_{m i_2}^{\alpha_1 \alpha_2} \partial_{i_1} W^m - X_{i_1 m}^{\alpha_1 \alpha_2} \partial_{i_2} W^m \right) \\ &\quad + \left(-X_{r l_2}^{\gamma_1 \gamma_2} \partial_{i_1} V^r - X_{l_1 r}^{\gamma_1 \gamma_2} \partial_{i_2} V^r \right) \left(-\delta_{\gamma_1}^{\alpha_1} \delta_{\gamma_2}^{\alpha_2} \delta_m^{l_1} \delta_{i_2}^{l_2} \partial_{i_1} W^m \right. \\ &\quad \left. - \delta_{\gamma_1}^{\alpha_1} \delta_{\gamma_2}^{\alpha_2} \delta_{i_1}^{l_1} \delta_m^{l_2} \partial_{i_2} W^m \right) - W^l \partial_l \left(-X_{m i_2}^{\alpha_1 \alpha_2} \partial_{i_1} V^m - X_{i_1 m}^{\alpha_1 \alpha_2} \partial_{i_2} V^m \right) \\ &\quad - \left(-X_{r l_2}^{\gamma_1 \gamma_2} \partial_{i_1} W^r - X_{l_1 r}^{\gamma_1 \gamma_2} \partial_{i_2} W^r \right) \left(-\delta_{\gamma_1}^{\alpha_1} \delta_{\gamma_2}^{\alpha_2} \delta_m^{l_1} \delta_{i_2}^{l_2} \partial_{i_1} V^m \right. \\ &\quad \left. - \delta_{\gamma_1}^{\alpha_1} \delta_{\gamma_2}^{\alpha_2} \delta_{i_1}^{l_1} \delta_m^{l_2} \partial_{i_2} V^m \right). \end{aligned}$$

Sonuncu ifadə aşağıdakı hədlərin cəmindən ibarətdir:

$$\begin{aligned} d_1 &= -V^l X_{m i_2}^{\alpha_1 \alpha_2} \partial_l \partial_{i_1} W^m, \\ d_2 &= -X_{i_1 m}^{\alpha_1 \alpha_2} V^l \partial_l \partial_{i_2} W^m, \\ d_3 &= X_{r i_2}^{\alpha_1 \alpha_2} \partial_m V^r \partial_{i_1} W^m, \\ d_4 &= X_{r m}^{\alpha_1 \alpha_2} \partial_{i_1} V^r \partial_{i_2} W^m, \\ d_5 &= X_{m r}^{\alpha_1 \alpha_2} \partial_{i_2} V^r \partial_{i_1} W^m, \\ d_6 &= X_{i_1 r}^{\alpha_1 \alpha_2} \partial_m V^r \partial_{i_2} W^m, \\ d_7 &= X_{m i_2}^{\alpha_1 \alpha_2} W^l \partial_l \partial_{i_1} V^m, \\ d_8 &= X_{i_1 m}^{\alpha_1 \alpha_2} W^l \partial_l \partial_{i_2} V^m, \\ d_9 &= -X_{r i_2}^{\alpha_1 \alpha_2} \partial_m W^r \partial_{i_1} V^m, \\ d_{10} &= -X_{r m}^{\alpha_1 \alpha_2} \partial_{i_1} W^r \partial_{i_2} V^m, \\ d_{11} &= -X_{m r}^{\alpha_1 \alpha_2} \partial_{i_2} W^r \partial_{i_1} V^m, \\ d_{12} &= -X_{i_1 r}^{\alpha_1 \alpha_2} \partial_m W^r \partial_{i_2} V^m. \end{aligned}$$

Asanlıqla yoxlamaq olur ki,

$$c_1 = d_9, \quad c_2 = d_1, \quad c_3 = d_3, \quad c_4 = d_7, \quad c_5 = d_{12},$$

$$c_6 = d_2, \quad c_7 = d_6, \quad c_8 = d_8, \quad d_4 + d_{11} = 0, \quad c_5 + d_{10} = 0.$$

Sonuncu münasibətlər göstərir ki, baxılan halda da (3.5) bərabərliyi ödənilir. Beləliklə, isbat olundu.

4. Vektor meydanlarının horizontal lifti

Fərz edək ki, $\nabla = (\Gamma_{ij}^k)$ – M hamar çoxobrazlısının üzərində verilmiş afın rabitədir, $V = V^i \partial_i$ isə hər hansı vektor meydanıdır.

Teorem 4.1.

$${}^H V = ({}^H V^i, {}^H V^{i\alpha_1\alpha_2}) = (V^i, X_{m i_2}^{\alpha_1\alpha_2} \Gamma_{r i_1}^m V^r + X_{i_1 m}^{\alpha_1\alpha_2} \Gamma_{r i_2}^m V^r) \quad (4.1)$$

obyekti (0,2) tipli $L_2^0(M)$ tenzor reperlərinin laylanması üzərində vektor qanunu ilə çevrilir.

İsbati. Əsaslandırmaq lazımdır ki, (2.2) çevrilməsi zamanı

$${}^H V^{I'} = A_I^{I'} {}^H V^I \quad (4.2)$$

bərabərliyi ödənilir. İlk növbədə $I' = i'$ halını nəzərdən keçirək. Bu halda (4.1) bərabərliyinin sağ tərəfindəki ifadəni aşağıdakı kimi çeviririk:

$$A_I^{i'} {}^H V^I = A_i^{i'} {}^H V^i + A_{i\alpha_1\alpha_2}^{i'} {}^H V^{i\alpha_1\alpha_2} = A_i^{i'} V^i = V^{i'} = {}^H V^{i'},$$

yəni (4.2) bərabərliyi ödənilir.

$I' = i'_{\alpha_1\alpha_2}$ halında (4.2) bərabərliyinin sol tərəfi bu şəkildə çevrilir:

$$\begin{aligned} {}^H V^{I'} &= {}^H V^{i'_{\alpha_1\alpha_2}} = X_{m' i'_2}^{\alpha_1\alpha_2} \Gamma_{r' i'_1}^{m'} V^{r'} + X_{i'_1 m'}^{\alpha_1\alpha_2} \Gamma_{r' i'_2}^{m'} V^{r'} \\ &= X_{m' i'_2}^{\alpha_1\alpha_2} A_m^{m'} A_{r'} A_{i'_1}^{i_1} \Gamma_{r i_1}^m V^{r'} + X_{m' i'_2}^{\alpha_1\alpha_2} A_m^{m'} \partial_{r'} A_{i'_1}^m V^{r'} \\ &+ X_{i'_1 m'}^{\alpha_1\alpha_2} A_m^{m'} A_{r'} A_{i'_2}^{i_2} \Gamma_{r i_2}^m V^{r'} + X_{i'_1 m'}^{\alpha_1\alpha_2} A_m^{m'} \partial_{r'} A_{i'_2}^m V^{r'} = \sum_{k=1}^4 l_k, \end{aligned}$$

burada

$$\begin{aligned} e_1 &= X_{m' i'_2}^{\alpha_1\alpha_2} A_m^{m'} A_{r'} A_{i'_1}^{i_1} \Gamma_{r i_1}^m V^{r'}, \\ e_2 &= X_{m' i'_2}^{\alpha_1\alpha_2} A_m^{m'} \partial_{r'} A_{i'_1}^m V^{r'}, \\ e_3 &= X_{i'_1 m'}^{\alpha_1\alpha_2} A_m^{m'} A_{r'} A_{i'_2}^{i_2} \Gamma_{r i_2}^m V^{r'}, \\ e_4 &= X_{i'_1 m'}^{\alpha_1\alpha_2} A_m^{m'} \partial_{r'} A_{i'_2}^m V^{r'} \end{aligned}$$

işarə olunmuşdur.

Digər tərəfdən baxılan halda (4.2) bərabərliyinin sağ tərəfindəki ifadəni aşağıdakı kimi çevirmək olar:

$$\begin{aligned} A_I^{i'_{\alpha_1\alpha_2}} {}^H V^I &= A_i^{i'_{\alpha_1\alpha_2}} {}^H V^i + A_{i\sigma_1\sigma_2}^{i'_{\alpha_1\alpha_2}} {}^H V^{i\sigma_1\sigma_2} \\ &= \partial_i (A_{i'_1}^{i_1} A_{i'_2}^{i_2}) X_{i_1 i_2}^{\alpha_1\alpha_2} V^i + A_{i'_1}^{i_1} A_{i'_2}^{i_2} \delta_{\sigma_1}^{\alpha_1} \delta_{\sigma_2}^{\alpha_2} X_{m i_2}^{\sigma_1\sigma_2} \Gamma_{r i_1}^m V^r \\ &+ A_{i'_1}^{i_1} A_{i'_2}^{i_2} \delta_{\sigma_1}^{\alpha_1} \delta_{\sigma_2}^{\alpha_2} X_{i_1 m}^{\sigma_1\sigma_2} \Gamma_{r i_2}^m V^r = \sum_{l=1}^4 f_l, \end{aligned}$$

burada

$$\begin{aligned} f_1 &= X_{i_1 i_2}^{\alpha_1\alpha_2} (\partial_i A_{i'_1}^{i_1}) A_{i'_2}^{i_2} V^i, \\ f_2 &= X_{i_1 i_2}^{\alpha_1\alpha_2} A_{i'_1}^{i_1} (\partial_i A_{i'_2}^{i_2}) V^i, \\ f_3 &= X_{m i_2}^{\alpha_1\alpha_2} A_{i'_1}^{i_1} A_{i'_2}^{i_2} \Gamma_{r i_1}^m V^r, \\ f_4 &= X_{i_1 m}^{\alpha_1\alpha_2} A_{i'_1}^{i_1} A_{i'_2}^{i_2} \Gamma_{r i_2}^m V^r. \end{aligned}$$

Müvafiq hesablamalar vasitəsilə aşağıdakı münasibətləri alırıq:

$$e_1 = f_3, e_2 = f_1, e_3 = f_4, e_4 = f_2. \quad (4.3)$$

Beləliklə, (4.3) münasibətlərindən görünür ki, (4.2) bərabərliyi $I' = i'_{\alpha_1\alpha_2}$ halında da ödənilir. Bu isə o deməkdir ki, ${}^H V$ obyektı $L_2^0(M)$ laylanması üzərində vektor meydanıdır. Bununla teoremin isbatı başa çatmış olur.

${}^H V$ vektor meydanını V vektor meydanının $L_2^0(M)$ laylanmasına horizontal lifti adlandırırıq.

Aşağıdakı teorem vektor meydanının (0,2) tipli tenzor reperlərinin $L_2^0(M)$ laylanmasına tam və horizontal liftlərinin arasındakı əlaqəni müəyyən edir.

Teorem 4.2. $V \in T_0^1(M)$ vektor meydanı üçün

$${}^C V - {}^H V = \bar{V}$$

bərabərliyi doğrudur, burada $\bar{V} = (0, \bar{V}^{i\alpha_1\alpha_2})$, $\bar{V}^{i\alpha_1\alpha_2} = -X_{mi_2}^{\alpha_1\alpha_2} \hat{V}_{i_1} V^m - X_{i_1 m}^{\alpha_1\alpha_2} \hat{V}_{i_2} V^m$, \hat{V} isə əmsalları $\hat{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ olan afin rabitədir.

İsbatı. (3.1) və (4.1) bərabərliklərindən müəyyən edirik ki, ${}^C V$ və ${}^H V$ vektor meydanları yalnız ${}^C V^{i\alpha_1\alpha_2}$ və ${}^H V^{i\alpha_1\alpha_2}$ komponentlər seriyaları ilə fərqlənirlər.

$\bar{V} = {}^C V - {}^H V$ işarə edək. Onda

$$(\bar{V}^l) = (\bar{V}^i, \bar{V}^{i\alpha_1\alpha_2}) = (0, \bar{V}^{i\alpha_1\alpha_2}).$$

Buradan alınır ki,

$$\begin{aligned} \bar{V}^{i\alpha_1\alpha_2} &= -X_{mi_2}^{\alpha_1\alpha_2} \partial_{i_1} V^m - X_{i_1 m}^{\alpha_1\alpha_2} \partial_{i_2} V^m - X_{mi_2}^{\alpha_1\alpha_2} \Gamma_{ri_1}^m V^r - X_{i_1 m}^{\alpha_1\alpha_2} \Gamma_{ri_2}^m V^r \\ &= -X_{mi_2}^{\alpha_1\alpha_2} (\partial_{i_1} V^m + \Gamma_{ri_1}^m V^r) - X_{i_1 m}^{\alpha_1\alpha_2} (\partial_{i_2} V^m + \Gamma_{ri_2}^m V^r) \\ &= -X_{mi_2}^{\alpha_1\alpha_2} (\partial_{i_1} V^m + \hat{\Gamma}_{i_1 r}^m V^r) - X_{i_1 m}^{\alpha_1\alpha_2} (\partial_{i_2} V^m + \hat{\Gamma}_{i_2 r}^m V^r) \\ &= -X_{mi_2}^{\alpha_1\alpha_2} \hat{V}_{i_1} V^m - X_{i_1 m}^{\alpha_1\alpha_2} \hat{V}_{i_2} V^m, \end{aligned}$$

$\hat{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ işarə olunmuşdur. Sonuncu münasibət teoremin isbat olduğunu göstərir.

Teorem 4.3. İxtiyari $V, W \in T_0^1(M)$ vektor meydanları üçün

$$[{}^H V, {}^H W] = {}^H [V, W] + \overline{R(V, W)}$$

bərabərliyi doğrudur, burada $\overline{R(V, W)} = X - L_2^0(M)$ laylanması üzərində elə şaquli vektor meydanıdır ki,

$$X^{i\alpha_1\alpha_2} = V^l W^r (X_{mi_2}^{\alpha_1\alpha_2} R_{lr i_1}^m + X_{i_1 m}^{\alpha_1\alpha_2} R_{lr i_2}^m)$$

burada $R_{kjl}^i - \nabla$ afin rabitəsinin əyrilik tenzorunun komponentləridir.

Aşağıdakı işarələməni daxil edək:

$$Z^i = [V, W]^i = V^m \partial_m W^i - W^m \partial_m V^i.$$

$Z = (Z^i)$ vektor meydanının $L_2^0(M)$ laylanmasına horizontal liftini təyin edək. ${}^H Z$ vektor meydanının komponentləri üçün iki hal mümkündür:

1) $I = i$, bu halda

$${}^H Z^i = {}^H[V, W]^i = [V, W]^i.$$

Digər tərəfdən,

$$\begin{aligned} [{}^H V, {}^H W]^i &= {}^H V^L \partial_L {}^H W^i - {}^H W^L \partial_L {}^H V^i = V^l \partial_l W^i - W^l \partial_l V^i = {}^H Z^i \\ &= {}^H[V, W]^i \end{aligned}$$

2) $I = i_{\alpha_1 \alpha_2}$, bu halda (4.1) bərabərliyini nəzərə almaqla yazıla bilər:

$$\begin{aligned} {}^H Z^{i_{\alpha_1 \alpha_2}} &= {}^H[V, W]^{i_{\alpha_1 \alpha_2}} = X_{mi_2}^{\alpha_1 \alpha_2} \Gamma_{ri_1}^m Z^r + X_{i_1 m}^{\alpha_1 \alpha_2} \Gamma_{ri_2}^m Z^r \\ &= Z^r \left(X_{mi_2}^{\alpha_1 \alpha_2} \Gamma_{ri_1}^m + X_{i_1 m}^{\alpha_1 \alpha_2} \Gamma_{ri_2}^m \right). \end{aligned}$$

Digər tərəfdən,

$$\begin{aligned} [{}^H V, {}^H W]^{i_{\alpha_1 \alpha_2}} &= {}^H V^L \partial_L {}^H W^{i_{\alpha_1 \alpha_2}} - {}^H W^L \partial_L {}^H V^{i_{\alpha_1 \alpha_2}} \\ &= {}^H V^l \partial_l {}^H W^{i_{\alpha_1 \alpha_2}} + {}^H V^{\gamma_1 \gamma_2} \partial_{l_{\gamma_1 \gamma_2}} {}^H W^{i_{\alpha_1 \alpha_2}} - {}^H W^l \partial_l {}^H V^{i_{\alpha_1 \alpha_2}} \\ &\quad - {}^H W^{\gamma_1 \gamma_2} \partial_{l_{\gamma_1 \gamma_2}} {}^H V^{i_{\alpha_1 \alpha_2}} \\ &= V^l \partial_l \left(X_{mi_2}^{\alpha_1 \alpha_2} \Gamma_{ri_1}^m W^r + X_{i_1 m}^{\alpha_1 \alpha_2} \Gamma_{ri_2}^m W^r \right) \\ &\quad + \left(X_{ml_2}^{\gamma_1 \gamma_2} \Gamma_{rl_1}^m V^r + X_{l_1 m}^{\gamma_1 \gamma_2} \Gamma_{rl_2}^m V^r \right) \left(\delta_{\gamma_1}^{\alpha_1} \delta_{\gamma_2}^{\alpha_2} \delta_q^{l_1} \delta_{i_2}^{l_2} \Gamma_{pi_1}^q W^p \right. \\ &\quad \left. + \delta_{\gamma_1}^{\alpha_1} \delta_{\gamma_2}^{\alpha_2} \delta_{i_1}^{l_1} \delta_q^{l_2} \Gamma_{pi_2}^q W^p \right) - W^l \partial_l \left(X_{mi_2}^{\alpha_1 \alpha_2} \Gamma_{ri_1}^m V^r + X_{i_1 m}^{\alpha_1 \alpha_2} \Gamma_{ri_2}^m V^r \right) \\ &\quad - \left(X_{ml_2}^{\gamma_1 \gamma_2} \Gamma_{rl_1}^m W^r + X_{l_1 m}^{\gamma_1 \gamma_2} \Gamma_{rl_2}^m W^r \right) \left(\delta_{\gamma_1}^{\alpha_1} \delta_{\gamma_2}^{\alpha_2} \delta_q^{l_1} \delta_{i_2}^{l_2} \Gamma_{pi_1}^q V^p \right. \\ &\quad \left. + \delta_{\gamma_1}^{\alpha_1} \delta_{\gamma_2}^{\alpha_2} \delta_{i_1}^{l_1} \delta_q^{l_2} \Gamma_{pi_2}^q V^p \right) \\ &= (V^l \partial_l W^r - W^l \partial_l V^r) \left(X_{mi_2}^{\alpha_1 \alpha_2} \Gamma_{ri_1}^m + X_{i_1 m}^{\alpha_1 \alpha_2} \Gamma_{ri_2}^m \right) \\ &\quad + X_{mi_2}^{\alpha_1 \alpha_2} V^l W^r \partial_l \Gamma_{ri_1}^m + X_{i_1 m}^{\alpha_1 \alpha_2} V^l W^r \partial_l \Gamma_{ri_2}^m + X_{mi_2}^{\alpha_1 \alpha_2} \Gamma_{rq}^m V^r \Gamma_{pi_1}^q W^p \\ &\quad + X_{mq}^{\alpha_1 \alpha_2} \Gamma_{ri_1}^m V^r \Gamma_{pi_2}^q W^p + X_{qm}^{\alpha_1 \alpha_2} \Gamma_{ri_2}^m V^r \Gamma_{pi_1}^q W^p \\ &\quad + X_{i_1 m}^{\alpha_1 \alpha_2} \Gamma_{rq}^m V^r \Gamma_{pi_2}^q W^p - X_{mi_2}^{\alpha_1 \alpha_2} W^l V^r \partial_l \Gamma_{ri_1}^m - X_{i_1 m}^{\alpha_1 \alpha_2} W^l V^r \partial_l \Gamma_{ri_2}^m \\ &\quad - X_{mi_2}^{\alpha_1 \alpha_2} \Gamma_{rq}^m W^r \Gamma_{pi_1}^q V^p - X_{mq}^{\alpha_1 \alpha_2} \Gamma_{ri_1}^m W^r \Gamma_{pi_2}^q V^p \\ &\quad - X_{qm}^{\alpha_1 \alpha_2} \Gamma_{ri_2}^m W^r \Gamma_{pi_1}^q V^p - X_{i_1 m}^{\alpha_1 \alpha_2} \Gamma_{rq}^m W^r \Gamma_{pi_2}^q V^p \\ &= Z^r \left(X_{mi_2}^{\alpha_1 \alpha_2} \Gamma_{ri_1}^m + X_{i_1 m}^{\alpha_1 \alpha_2} \Gamma_{ri_2}^m \right) \\ &\quad + X_{mi_2}^{\alpha_1 \alpha_2} V^l W^r \left(\partial_l \Gamma_{ri_1}^m - \partial_r \Gamma_{li_1}^m + \Gamma_{lq}^m \Gamma_{ri_1}^q - \Gamma_{rq}^m \Gamma_{li_1}^q \right) \\ &\quad + X_{i_1 m}^{\alpha_1 \alpha_2} V^l W^r \left(\partial_l \Gamma_{ri_2}^m - \partial_r \Gamma_{li_2}^m + \Gamma_{lq}^m \Gamma_{ri_2}^q - \Gamma_{rq}^m \Gamma_{li_2}^q \right) \\ &= {}^H[V, W]^{i_{\alpha_1 \alpha_2}} + V^l W^r \left(X_{mi_2}^{\alpha_1 \alpha_2} R_{lri_1}^m + X_{i_1 m}^{\alpha_1 \alpha_2} R_{lri_2}^m \right), \end{aligned}$$

burada

$$R_{lri}^m = \partial_l \Gamma_{ri}^m - \partial_r \Gamma_{li}^m + \Gamma_{lq}^m \Gamma_{ri}^q - \Gamma_{rq}^m \Gamma_{li}^q$$

∇ afin rabitəsinin əyrilik tenzorunun komponentləridir. Teorem isbat olundu.

Qeyd etmək lazımdır ki, teorem 4.3-ün kotoxunan laylanma, reperlərin laylanması, afinor laylanması hallarındakı analoqları [5], [2], [6] işlə-

rində isbat olunmuşdur. Teorem 4.3 onu göstərir ki, vektor meydanlarının tam liftinin qurulması əmələndən fərqli olaraq, vektor meydanının horizontal liftinin qurulması əməli M hamar çoxobrazlısı və $L_2^0(M)$ laylanması üzərindəki vektor meydanlarının Li cəbrlərinin homomorfizmi deyildir.

ƏDƏBİYYAT

1. Mok K.P. Complete Lifts of Tensor Fields and Connections to the Frame Bundle // Proc. London Math. Soc., 1979, v.38, No3, p. 72-88.
2. Cordero L.A., de Leon M. Lifts of tensor fields to the Frame Bundle // Rend. Circ. Mat. / Palermo, 983, v.32, No2, p.236-276.
3. Salimov A.A., Fattayev H.D. Coframe bundle and problems of lifts on its cross-sections // Turk J Maths., 2018, v. 42, No4, p. 2035-2044.
4. Fattayev H.D., Salimov A.A. Metrics and Connections on the Bundle of Affine Frames // Chin. Ann. Math. Ser. B, v.42, 2021, No1, p.121-134.
5. Yano K., Patterson E.M. Horizontal Lift from a Manifold to the cotangent bundle // y. Math. Soc. Japan, 1967, v.19, p. 185-198.
6. Фаттаев Г.Д. Горизонтальный Лифт Тензорных полей в Чистое Афинорное под-расслоение // Москва, 1992, 19с., Деп. в ВИНТИ 25.09.92, No 2892- В92.

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ СТРУКТУР В РАССЛОЕНИЕ ТЕНЗОРНЫХ РЕПЕРОВ ТИПА (0,2)

Г.Д.ФАТТАЕВ, Ф.Б.БАШИРЛИ

РЕЗЮМЕ

В работе определяется расслоение тензорных реперов типа (0,2), строящая полный и горизонтальный лифты векторных полей, заданных на базе расслоения, изучаются их основные свойства и соотношения между ними.

Ключевые слова: тензорный репер, аффинная связность, расслоение, горизонтальный лифт, тензор кривизны, коммутатор.

STUDY OF SOME STRUCTURES IN THE BUNDLE OF TENSOR FRAMES OF TYPE (0,2)

H.D.FATTAYEV, A.B.BASHIRLI

SUMMARY

In the paper the bundle of (0,2) type tensor frames is defined, the complete and horizontal lifts of vector fields given on the base of the bundle are constructed, its main properties and the relation between them are studied.

Keywords: tensor frame, affine connection, bundle, horizontal lift, curvature tensor, commutator.

MSC 34B37, 37C25, 37C75**EXISTENCE AND UNIQUENESS RESULTS FOR THE FIRST-ORDER NON-LINEAR IMPULSIVE INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH TWO-POINT BOUNDARY CONDITIONS****Sh.I.JABRAILOV, N.B.MAMMADOVA, Y.A.SHARIFOV**
Baku State University
sharifov22@rambler.ru

The article discusses the existence and uniqueness of solutions for a system of nonlinear integro-differential equations of the first order with two-point boundary conditions. The Green function is constructed, and the problem under consideration reduces to equivalent integral equation. Existence and uniqueness of a solution to this problem analyzed using the Banach the contraction mapping principle. Schaefer's fixed point theorem used to prove the existence of solutions.

Keywords: Two-point boundary conditions, impulsive systems, existence and uniqueness solutions, fixed point theorems, first order differential equation

1. Introduction and Problem Statement

A lot of problems of physics, engineering, biology and economy are described by differential and integro-differential equations. Such differential equations were studied rather well in [1]- [8]. In the above mentioned papers, mainly the differential equations with local conditions are studied. However, the last years there is a great interest to differential and integro-differential equations with nonlocal boundary conditions, by which a number of practical processes are described. Today, there exist a great number of works devoted to ordinary differential and integro-differential equations with nonlocal boundary conditions in which the theorem on the existence of solutions are proved for different types of nonlocal conditions [9]- [33].

Note that numerical methods for multipoint and integral boundary problems for first-order ordinary differential equations were developed in [34,35].

In this work for the Green function is constructed for the two-point boundary value problem and the considered problem is reduced to the equivalent integral equations. Then the existence and uniqueness of the

solutions is studied using the Banach contraction mapping principle. The existence of the solution is also proved by applying Schaefer's fixed point theorem.

In this paper, we study the existence and uniqueness of solutions of nonlinear integro-differential equations of the type

$$\dot{x} = f(t, x, \phi x(t), \varphi x(t)), \quad t \in [0, T], i \neq t_i \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad (1)$$

with two-point boundary conditions

$$x(0) + Bx(T) = \alpha, \quad (2)$$

and impulsive conditions

$$\Delta x(t_i) = I_i(x(t_i)), \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_p < T_{p+1} = T, \quad (3)$$

where B are constant square matrices of order n such that $\det N \neq 0$, $N = E + B$; $f : [0, T] \times R^n \times R^n \times R^n \rightarrow R^n$ and $I_i : R^n \rightarrow R^n, i = 1, 2, \dots, p$, are a given

function and $\phi x(t) = \int_0^t \mu(t, s)x(s)ds, \varphi x(t) = \int_0^T \gamma(t, s)x(s)ds$ where $\mu, \gamma : R \times R \rightarrow R^{n \times n}$,

with $\phi_0 = \max_{t, s \in [0, T]} \|\phi(t, s)\| < \infty, \gamma_0 = \max_{t, s \in [0, T]} \|\gamma(t, s)\| < \infty$;

$$\Delta x(t_i) = x(t_i^+) - x(t_i), \quad i = 1, 2, \dots, p$$

where

$$x(t_i^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} x(t_i + h), \quad x(t_i^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} x(t_i + h)$$

are the right- and left-hand limits of $x(t)$ at $t = t_i$, respectively.

The purpose of this paper is to prove new existence and uniqueness results using Banach contraction principle and Schaefer's fixed point theorem.

This paper is organized as follows. In Section 2, we introduce definition and lemmas which are the key tools for our main result. Section 3 focuses the theorems on the existence and uniqueness of the solution of problem (1) -(3) established under some sufficient conditions on the nonlinear terms.

2. Preliminaries

In this section, we present some basic definitions and preliminary facts which are used throughout the paper. We denote by $C([0, T]; R^n)$ the Banach space of all continuous functions from $[0, T]$ into R^n with the norm

$$\|x\| = \max\{|x(t)| : t \in [0, T]\},$$

where $\|\cdot\|$ is the norm in the space R^n .

We define the linear space

$$PC([0, T]; R^n) = \{x : [0, T] \rightarrow R^n; x(t) \in C((t_i, t_{i+1}]; R^n), i = 1, 2, \dots, p, \\ x(t_i^-) \text{ and } x(t_i^+) \text{ exist}, i = 0, 1, \dots, p \text{ and } x(t_i^-) = x(t_i^+)\}.$$

Obviously, $PC([0, T]; R^n)$ is a Banach space with norm

$$\|x\|_{PC} = \max\{\|x\|_{(t_i, t_{i+1}]}, i = 0, 1, \dots, p\}$$

For the sake of simplicity, we can consider the following problem:

$$\dot{x}(t) = y(t), \quad t \in [0, T] \quad (4)$$

$$x(0) + Bx(T) = \alpha \quad (5)$$

$$\Delta x(t_i) = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, p. \quad (6)$$

Lemma 2.1 Let $y \in C([0, T]; R^n)$ and $a_i \in R^n$. The unique solution $x(t) \in PC([0, T]; R^n)$ of the boundary value problem for differential equation (3) with boundary conditions (4) and impulsive conditions (6) is given by

$$x(t) = N^{-1}\alpha + \int_0^T G(t, \tau)y(\tau)d\tau + \sum_{0 < t_i < T} G(t, t_i)a_k \quad (7)$$

for $t \in (t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, 1, \dots, p$, where

$$G(t, \tau) = \text{sign}(t - \tau) \begin{cases} N^{-1}, & 0 \leq \tau \leq t \\ -N^{-1}B, & t < \tau \leq T. \end{cases}$$

Proof. If function $x = x(\cdot)$ is a solution of the differential equation (4), then for $t \in (0, T)$,

$$\int_0^t y(s)ds = \int_0^t \dot{x}(s)ds = [x(t_1) - x(0^+)] + [x(t_2) - x(t_1^+)] + \dots + [x(t) - x(t_i^+)] = \\ = -x(0) - [x(t_1^+) - x(t_1)] - [x(t_2^+) - x(t_2)] - \dots - [x(t_i^+) - x(t_i)] + x(t).$$

where x_0 is an arbitrary constant vector. Using this formula and condition (6), we can write

$$x(t) = x(0) + \int_0^t y(s)ds + \sum_{0 < t_i < t} a_i. \quad (8)$$

Now we define x_0 so that, the function in equality (8) satisfies condition (5). Then we have

$$(E + B)x(0) = \alpha - B \int_0^T y(t)dt - B \sum_{0 < t_i < T} a_i.$$

This obviously implies

$$x_0 = N^{-1}\alpha - N^{-1}B \int_0^T y(\tau)d\tau - N^{-1}B \sum_{0 < t_i < T} a_k. \quad (9)$$

Now in (6) we take into account the value x_0 determined from the equality (9) and yield

$$x(t) = N^{-1}\alpha - N^{-1}B \int_0^T y(\tau)d\tau - N^{-1}B \sum_{0 < t_i < T} a_k + \int_0^t y(s)ds + \sum_{0 < t_i < t} a_i. \quad (10)$$

Since equality

$$(E - N^{-1}B) = N^{-1}$$

is true, then we can introduce the following function:

$$G(t, \tau) = \text{sign}(t - \tau) \begin{cases} N^{-1}, & 0 \leq \tau \leq t \\ -N^{-1}B, & t < \tau \leq T. \end{cases} \quad (11)$$

Using this function, equality (11) can be written as an impulsive integral equation (7).

Lemma 2.2. Assume that $f \in C([0, T] \times R^n; R^n)$. Then the function $x(t)$ is a solution of boundary-value problem (1)-(3) if and only if $x(t)$ is a solution of the impulsive integral equation

$$x(t) = N^{-1}\alpha + \int_0^T G(t, \tau) f(\tau, x(\tau), \phi x(\tau), \phi x(\tau)) d\tau + \sum_{0 < t_i < T} G(t_i, t_k) I_k(x(t_k)). \quad (10)$$

Proof: Let $x(t)$ be a solution of the boundary value problem (1) -(3). This lemma can be derived by a similar argument to Lemma 2.1. By checking directly, we make sure that the solution of integral equation (10) satisfies the boundary value problem (1) -(3). Lemma 2.2 is proved

3. Main Results

We introduce the following conditions:

(H1) The functions $f : [0, T] \times R^n \times R^n \times R^n \rightarrow R^n$ and $I_i : R^n \rightarrow R^n$ $i = 1, 2, \dots, p$ are continuous;

(H2) There exist a constants $M \geq 0$ and $l_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, p$ such that

$$\begin{aligned} |f(t, x_1, x_2, x_3) - f(t, y_1, y_2, y_3)| &\leq M(|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + |x_3 - y_3|) \\ |I_i(x_1) - I_i(y_1)| &\leq l_i |x_1 - y_1|, i = 1, 2, \dots, p, \end{aligned}$$

for each $t \in [0, T]$ and all $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \in R^n$;

(H3) There exists a constants K, k such that $|f(t, x)| \leq K, |J_i(x)| \leq k, i = 1, 2, \dots, p$

for each $t \in [0, T]$ and all $x \in R^n$.

Theorem 3.1. Assume that, assumptions (H1) and (H2) holds and

$$L = S \left(TM(1 + T(\mu_0 + \gamma_0)) + \sum_{i=1}^p l_i \right) < 1, \quad (11)$$

where $S = \max_{[0, T] \times [0, T]} \|G(t, \tau)\|$.

Then boundary-value problem (1)-(3) has a unique solution on $[0, T]$.

Proof: Transform the boundary value problem (1)– (3) into a fixed point problem. Consider the operator $F : PC([0, T]; R^n) \rightarrow PC([0, T]; R^n)$ defined by

$$(Fx)(t) = N^{-1}\alpha + \int_0^T G(t, \tau) f(\tau, x(\tau), \phi x(\tau), \phi x(\tau)) d\tau + \sum_{0 < t_i < T} G(t_i, t_k) I_k(x(t_k)). \quad (12)$$

Clearly, the fixed points of the operator F are solutions of the boundary problem (1)– (3).

Setting $\max_{[0,T]} |f(t,0,0,0)| = M_f$, $\max_{k \in \{1,2,\dots,p\}} |I_k(0)| = m$ and let us select

$$r \geq \frac{\|N^{-1}\alpha\| + M_f TS + mp}{1-L}. \text{ We show that } FB_r \subset B_r \text{ where}$$

$$B_r = \{x \in PC([0,T]R^n) : \|x\| \leq r\}.$$

For $x \in B_r$, using (H1) and (H2), we get

$$\begin{aligned} \|Fx(t)\| &\leq \|N^{-1}\alpha\| + \int_0^T |G(t,\tau)| (|f(\tau, x(\tau), \phi x(\tau), \chi(\tau)) - f(\tau, 0, 0, 0)| + |f(\tau, 0, 0, 0)|) d\tau + \\ &\quad + \sum_{k=1}^p |G(t_i, t_k)| (|I_k(x(t_k)) - I_k(0)| + |I_k(0)|) \leq \\ &\leq \|N^{-1}d\| + S \int_0^T (M(|x| + |\phi x| + |\chi|) + M_f) dt + S \sum_{k=1}^p l_k \|x(t_k)\| + mp \leq \\ &\leq \|N^{-1}d\| + SMT(|x| + T(\phi_0|x|) + \gamma_0|x|) + M_f TS + S \sum_{k=1}^p l_k \|x\| + mp \\ &\leq \|N^{-1}\alpha\| + S \left(MT(1 + T(\phi_0 + \gamma_0)) + \sum_{k=1}^p l_k \right) \|x\| + M_f TS + mp \leq r \end{aligned}$$

In order to show that the operator F is a contraction, let for any $x, y \in B_r$ we have

$$\begin{aligned} \|Fx - Fy\| &\leq \int_0^T |G(t,\tau)| (|f(\tau, x(\tau), \phi x(\tau), \chi(\tau)) - f(\tau, y(\tau), \phi y(\tau), \chi(\tau))|) d\tau + \\ &\quad + \left| \sum_{k=1}^p G(t_i, t_k) (I_k(x(t_k)) - I_k(y(t_k))) \right| \leq \\ &\leq MS \int_0^T (|x(t) - y(t)| + |\phi x(t) - \phi y(t)| + |\chi(t) - \chi(y(t))|) dt + S \sum_{k=1}^p l_k \|x(t_k) - y(t_k)\| \leq \\ &\leq S \left(MT(1 + T(\phi_0 + \gamma_0)) + \sum_{k=1}^p l_k \right) \max_{[0,T]} |x(t) - y(t)| \end{aligned}$$

or

$$\|Fx - Fy\| \leq L \|x - y\|.$$

It is seen that, F is contraction by condition (11). So, the boundary-value problem (1) -(3) has a unique solution.

Theorem 3.2. Assume conditions(H1)-(H3) hold. Then boundary-value problem (1)- (3) has at least one solution on $[0, T]$.

Proof. Let F be the operator defined in (12). We shall use Schaefer's fixed point theorem to prove that F has a fixed point. The proof will be given in several steps.

Step 1: F is continuous. Let $\{x_n\}$ be a sequence such that $x_n \rightarrow x$ in $PC([0, T]; R^n)$. Then, for each $t \in (t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, 1, \dots, p$

$$\begin{aligned} |(Fx)(t) - (Fx_n)(t)| &= \left| \int_0^T G(t,\tau) (f(\tau, x(\tau), \phi x(\tau), \chi(\tau)) - f(\tau, x_n(\tau), \phi x_n(\tau), \chi_n(\tau))) d\tau \right| + \\ &\quad + \left| \sum_{k=1}^p G(t_i, t_k) (I_k(x(t_k)) - I_k(x_n(t_k))) \right| \leq \end{aligned}$$

$$\leq S \left(TM(1+T(\phi_0 + \gamma_0)) + \sum_{k=1}^p l_k \right) \|x(t) - x_n(t)\| \leq L \|x - x_n\|.$$

From here we get $\|(Fx)(t) - (Fx_n)(t)\| \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$, which implies that the operator F is continuous.

Step 2: F maps bounded sets into bounded sets in $PC([0, T]; R^n)$. Indeed, it is enough to show that for any $\eta > 0$ there exists a positive constant ω such that for each $x \in B_\eta = \{x \in PC([0, T]; R^n) : \|x\| \leq \eta\}$ we have $\|F(x)\| \leq \omega$. We have for each $t \in [0, T]$

$$\|(Fx)(t)\| \leq \|N^{-1}\alpha\| + S(TK + pk).$$

This implies that

$$\|F(x)\| \leq \|N^{-1}\alpha\| + S(TK + pk) = \omega.$$

Step 3: F maps bounded sets into equicontinuous sets of $PC([0, T]; R^n)$. Let $\xi_1, \xi_2 \in [0, T]$, $\xi_1 < \xi_2$, B_η be a bounded set of $PC([0, T]; R^n)$ as in Step 2, and let $x \in B_\eta$.

Then, we have

$$\begin{aligned} & F(x(\xi_2)) - F(x(\xi_1)) = \\ &= N^{-1} \int_0^{\xi_2} f(\tau, x(\tau), \phi x(\tau), \chi(\tau)) d\tau - N^{-1} B \int_{\xi_1}^T f(\tau, x(\tau), \phi x(\tau), \chi(\tau)) d\tau - \\ & - N^{-1} \int_0^{\xi_1} f(\tau, x(\tau), \phi x(\tau), \chi(\tau)) d\tau - N^{-1} B \int_{\xi_1}^T f(\tau, x(\tau), \phi x(\tau), \chi(\tau)) d\tau = \\ &= \int_{\xi_1}^{\xi_2} f(\tau, x(\tau)) d\tau. \end{aligned}$$

As $t_2 \rightarrow t_1$, the right-hand side of the above equalities tends to zero. As a consequence of Steps 1 to 3 together with the Ascoli–Arzela theorem, we can conclude that $F : PC([0, T]; R^n) \rightarrow PC([0, T]; R^n)$ is completely continuous.

Step 4: A priori bounds. Now, it remains to show that the set $\Delta = \{x \in PC([0, T]; R^n) : x = \lambda F(x) \text{ for some } 0 < \lambda < 1\}$ is bounded. Let $x \in \Delta$. Then, $x = \lambda F(x)$ for some $0 < \lambda < 1$. Thus, for each $t \in (t_i, t_{i+1}]$ $i = 0, 1, \dots, p$ we have

$$x(t) = \lambda N^{-1}\alpha + \lambda \int_0^T G(t, \tau) f(\tau, x(\tau), \phi x(\tau), \chi(\tau)) d\tau + \lambda \sum_{k=1}^p G(t_i, t_k) I_k(x(t_k)).$$

From here

$$\|x\| \leq \|N^{-1}\alpha\| + S(TK + pk).$$

Therefore, the set Δ is bounded. The conclusion of Schaefer's fixed point theorem applies and the operator F has at least one fixed point. So, there exists at least one solution for the problems (1)-(3) on $[0, T]$.

4. Conclusion

The boundary conditions considered in this paper are general enough and can be used extensively in a wide class of problems. In this work, the existence and uniqueness of the solutions for the first-order nonlinear impulsive differential equations with two-point conditions are established under sufficient conditions. Note that, given here methods can be used in similar multi-point problems for the ordinary differential equations as follows:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), \mu x(t), \nu x(t)), \quad t \in [0, T],$$

with multi-point and integral boundary conditions

$$\sum_{i=0}^m l_i x(t_i) + \int_0^T n(t) x(t) dt = \alpha.$$

Here $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{m-1} < t_m = T$; $n(t) \in R^{n \times n}$ is a given function; $l_i \in R^{n \times n}$, $i = 1, 2, \dots, m$ are given matrices; $\alpha \in R^n$ is a given vector and

$$\det N \neq 0, \quad N = \sum_{i=0}^m l_i + \int_0^T n(t) dt.$$

REFERENCES

1. Benchohra, M., Henderson, J., & (2006). Ntouyas, S.K. Impulsive differential equations and inclusions. Contemporary mathematics and its application, Hindawi Publishing Corporation. New York. 2: 2006.
2. Boichuk, A.A., & Samoilenko, A.M. (2016). Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems (2nd ed.), Berlin/Boston: Walter de Gruyter GmbH, 2016, 314 pp.
3. Boichuk, A.A. & Samoilenko, A.M. (2004). Generalized Inverse Operators and Fredholm Boundary-Value Problems, Brill, Utrecht.
4. Halanay, A., Wexler D. (1971). Quality theory of impulse systems, Moscow, Mir, 309 pp
5. Lakshmikantham, V., Bainov, D.D., & Simeonov, P.S. (1989). Theory of Impulsive Differential Equations, World Scientific. Singapore, 434 pp.
6. Perestyuk, N.A., Plotnikov, V.A., Samoilenko, A.M., & Skripnik, N.V. (2011). Differential equations with impulse effect: multivalued right-hand sides with discontinuities, DeGruyter Stud. Math. – Berlin: Walter de Gruyter Co., 40 pp.
7. Samoilenko, A.M., & Perestyuk, N.A. (1987). Impulsive differential equations, Kiev, Visha Shkola, 287 pp.
8. Samoilenko, & A.M., Perestyuk, N.A. (1995). Impulsive differential equation, Singapore: World Sci.
9. Mesloub S. (2008). On a mixed nonlinear one point boundary value problem for an integro-differential equation, *Boundary Value Problems*, Article ID 814947. 1–8.
10. Anguraj, A. & Mallika Arjunan, M. (2005). Existence and uniqueness of mild and classical solutions of impulsive evolution equations, *Elect. J. Differential Equations*, 2005 no. 111, 1-8.
11. Ashyralyev, A., & Sharifov, Y.A. (2012). Optimal control problem for impulsive systems with integral boundary conditions. *AIP Conference Proceedings*, 1470(1):12–15.
12. Ashyralyev, A., & Sharifov, Y.A. (2012) Existence and uniqueness of solutions for

- nonlinear impulsive differential equations with two-point and integral boundary conditions. *AIP Conference Proceedings*, 1470(1):8–11.
13. Ashyralyev, A., & Sharifov, Y.A. (2013) Existence and uniqueness of solutions for nonlinear impulsive differential equations with two-point and integral boundary conditions. *Advances in Difference Equations*, 2013(173):1–11.
 14. Ashyralyev, A., & Sharifov, Y.A. (2013) Optimal control problems for impulsive systems with integral boundary conditions, *Electron. Journal Differential Equations*, Vol. 2013, No. 80, pp. 1-11.
 15. Li, M., & Han, M. (2009). Existence for neutral impulsive functional differential equations with nonlocal conditions. *Indagationes Mathematicae*, 20, No. 3, 435-451.
 16. Mardanov, M.J., & Sharifov, Y.A. (2015). Existence results for first order nonlinear impulsive differential equations with nonlocal boundary conditions, *AIP Conference Proceedings* 1676, 020015.
 17. Mardanov, M.J., Sharifov, Y.A., & Molaei, H. H. (2014). Existence and uniqueness of solutions for first-order nonlinear differential equations with two-point and integral boundary conditions, *Electronic Journal of Differential Equations*, vol. 2014, No. 259, pp. 1-8.
 18. Qasimov Y.S., Jafari H., Mardanov, M.J., Sardarova, R.A., Sharifov, Y.A., Existence and uniqueness of solutions of the nonlinear impulse differential equations with nonlocal boundary conditions, *Quaestiones Mathematicae*, <https://doi.org/10.2989/16073606.2021.1945702>
 19. Mardanov, M.J., Sharifov, Y.A., & Ismayilova, K. E. (2018). Existence and uniqueness of solutions for nonlinear impulsive differential equations with three-point boundary conditions, *e-Journal of Analysis and Applied Mathematics* No.1, 21-36.
 20. Mardanov, M.J., Sharifov, Y.A., & Ismayilova, K. E. (2019). Existence and Uniqueness of Solutions for the First-Order Non-Linear Differential Equations with Three-Point Boundary Conditions, *Filomat*, 33 (5), 1387-1395.
 21. Mardanov, M.J., & Sharifov, Y.A., (2015). Existence results for first order nonlinear impulsive differential equations with nonlocal boundary conditions, *AIP Conference Proceedings*, 1676 (1), 020015.
 22. Mardanov, M.J., Sharifov, Y.A., & Zeynally. F. M. (2019). Existence and uniqueness of solutions for nonlinear impulsive differential equations with nonlocal boundary conditions, *Vestn. Tomsk. Gos. Univ. Mat. Mekh.*, No. 60, 61–72.
 23. Mardanov, M. J., Sharifov, Y. A., & Zeynalli. F. M. (2019) Existence and uniqueness of the solutions to impulsive nonlinear integro-differential equations with nonlocal boundary conditions, *Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Azerbaijan*, Volume 45, No. 2, 222–233.
 24. M.J.Mardanov, Y.A.Sharifov, R.A.Sardarova, & H.N.Aliyev (2020). Existence and Uniqueness of Solutions for Nonlinear Impulsive Differential Equations with Three-Point and Integral Boundary Conditions, *Azerbaijan Journal of Mathematics*, Vol. 10, No 1, 110-126.
 25. Mardanov, M.J., Sharifov, Y.A., Gasimov, Y.S., & Cattani, C. (2021) Non-Linear First-Order Differential Boundary Problems with Multipoint and Integral Conditions. *Fractal Fract.* 5, 15. <https://doi.org/10.3390/fractalfract5010015>
 26. Mardanov, M.J., Sharifov, Y.A., Aliyev, H.N., & Sardarova, R.A. (2020). Existence and uniqueness of solutions for the first order non-linear differential equations with multipoint boundary conditions, *European Journal of Pure and Applied Mathematics* 13(3):414-426.
 27. Mardanov, M.J., Sharifov, Y. A., & Ismayilova, K.E. (2020). Existence and uniqueness

- of solutions for the system of integro-differential equations with three-point and nonlinear integral boundary conditions, *Bulletin of the Karaganda university mathematics series* № 3(99): 26-37.
28. Selvaraj, B., Mallika Arjunan, M., & Kavitha, V. (2009). Existence of solutions for impulsive nonlinear differential equations with nonlocal conditions, *J. KSIAM* 13, No.3, 203-215.
 29. Sharifov, Ya. (2013) Optimal control problems for impulsive systems under nonlocal boundary conditions, *Vestnik Sam. Gos. Tekhn. Univ., ser. Phys. math. sci.*, 33, no. 4, (33), 34-45.
 30. Sharifov, Ya. (2013). Optimal control for impulsive systems under nonlocal boundary conditions, *Russian Mathematics*, 57, No. 2, 65-72.
 31. Sharifov, Y.A., & Mammadova, N.B. (2014). Optimal control problem described by impulsive differential equations with nonlocal boundary conditions, *Differential equations*, 50, No. 3, 403-411.
 32. Sharifov, Y.A. (2012). Conditions Optimality in Problems Control with Systems Impulsive Differential Equations Under Non-Local Boundary Conditions, *Ukrainian Mathematical Journal*, 64, No. 6, 836-847.
 33. Urabe, M. (1966). An existence theorem for multi-point boundary value problems, *Funkcialaj Ekvacioj.*, 9, pp. 43-60.
 34. Abdullayev, V.M. (2018). Numerical solution to optimal control problems with multipoint and integral conditions. *Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Azerbaijan*, 44, No. 2, 171-186.
 35. Aida-zade, K.R., (2018). An approach for solving nonlinearly loaded problems for linear ordinary differential equations. *Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Azerbaijan*, 44, No. 2, 338-350.

İMPULS TƏSİRLİ QEYRİ-XƏTTİ BİRİNCİ TƏRTİB QEYRİ-LOKAL ŞƏRHƏD ŞƏRTLİ İNTEQRO-DİFERENSİAL TƏNLİKLƏRİN HƏLLİNİN VARLIĞI VƏ YEGANƏLİYİN NƏTİCƏLƏRİ

Ş.İ.CƏBRAYİLOV, N.B.MƏMMƏDOVA, Y.Ə.ŞƏRİFOV

XÜLASƏ

Məqalədə impuls təsirli qeyri-xətti birinci tərtib qeyri-lokal şərtli inteqro-diferensial tənliklərin həllinin varlığı və yeganəliyi araşdırılmışdır. Qrin funksiyası qurulmuşdur və baxılan sərhəd məsələsi inteqral tənliyə gətirilmişdir. Sərhəd məsələsinin həllinin varlığı və yeganəliyi Banaxın sıxılmış inikas prinsipinin köməyi ilə araşdırılmışdır. Şəferin tərpənməz nöqtə haqqında teoreminin köməyi ilə sərhəd məsələsinin ən azı bir həllinin varlığı haqqında teorem isbat edilmişdir.

Açar sözlər: İkinöqtəli sərhəd şərtləri, impuls təsirli sistemlər, həllin varlığı və yeganəliyi, tərpənməz nöqtə haqqında teorem, birinci tərtib diferensial tənlik.

**СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕЗУЛЬТАТОВ ДЛЯ
НЕЛИНЕЙНЫХ ИМПУЛЬСНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА
С НЕЛОКАЛЬНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ**

Ш.И.ДЖАБРАИЛОВ, Н.Б.МАМЕДОВА, Я.А.ШАРИФОВ

РЕЗЮМЕ

В статье обсуждается существование и единственность решений системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений первого порядка с двухточечными граничными условиями при импульсных воздействиях. Построена функция Грина, и рассматриваемая задача сводится к эквивалентному интегральному уравнению. Существование и единственность решения этой задачи проанализировано с помощью банахова принципа сжимающего отображения. Теорема Шефера о неподвижной точке использовалась для доказательства существования решений.

Ключевые слова: Двухточечные граничные условия, импульсные системы, о существовании и единственности решения, теоремы о неподвижной точке, дифференциальное уравнение первого порядка.

УДК 519.65

**О РАСПРЕДЕЛЕНИИ НУЛЕЙ МОДИФИЦИРОВАННОЙ
ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ ПЕРВОГО РОДА И ЕЕ ПРОИЗВОДНОЙ****М.Г.МАХМУДОВА, Г.М.МАСМАЛИЕВ****Бакинский Государственный Университет*
hacimasmaliyev@hotmail.com

Исследуются нули линейной комбинации модифицированной функции Бесселя первого рода $I_\nu(z)$ и ее производной, рассматриваемой как функция от порядка ν . Доказано, что при фиксированном $z, z > 0$, функция $aI_\nu(z) + bI'_\nu(z)$, где $a^2 + b^2 > 0, ab \geq 0$ не имеет нулей в правой полуплоскости $\text{Re } \nu \geq 0$.

Ключевые слова: функции Бесселя, нули функций Бесселя, спектральная задача, собственные значения.

Введение и основной результат

Анализ многих физических проблем требует исследования нулей конкретных трансцендентных функций. В ситуации с круговой или сферической симметрии часто используются функции Бесселя или их комбинации. Следует отметить, что вопрос о нулях функций Бесселя изучен более детально, когда они рассматриваются как функции от своих аргументов, т.е. при фиксированном порядке (см. [1]–[5] и цитированную в них литературу). С другой стороны, различные квантово-механические приложения стимулируют также интерес к корням функций Бесселя, рассматриваемых как функции от их порядка. В этом направлении отметим работы [6], [7], в которых для положительных z исследовались нули J_k функции Бесселя первого рода $J_\nu(z)$.

Подобная задача для модифицированной функции Бесселя второго рода изучалась в работе [8] (см. также [9], [10]). Кроме того, некоторые прикладные задачи требуют изучения нулей линейных комбинаций бесселевых функций и их производных. В связи с этим отметим работу [11], которая посвящена исследованию нулей линейной комбинации функции Ганкеля и ее производной.

В работах [1],[2] показано, что модифицированная функция Бесселя второго рода $I_\nu(z)$, как функция от порядка ν , не имеет нулей в правой полуплоскости. Интерес представляет также анализ ν -нулей линейной комбинации самой функции $I_\nu(z)$ и ее производной $\frac{d}{dz}I_\nu(z)$. Однако использованная в [1],[2] методика не позволяет исследовать нулей линейной комбинации функции $I_\nu(z)$ и ее производной $\frac{d}{dz}I_\nu(z)$.

Рассмотрим модифицированное уравнение Бесселя

$$z^2 u'' + zu' - (z^2 + \nu^2)u = 0, \quad (1)$$

где ν является комплексным параметром. Хорошо известно [12], что это уравнение имеет решение $I_\nu(z)$, представимое в виде

$$I_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}}{k! \Gamma(\nu + k + 1)}, \quad (2)$$

где $\Gamma(\cdot)$ – Гамма функция. Функция $I_\nu(z)$ называется модифицированной функцией Бесселя первого рода.

В настоящей работе изучен вопрос о распределении нулей функции $aI_\nu(z) + b\frac{dI_\nu(z)}{dz}$, рассматриваемой как функция от порядка ν , где a и b действительны и $z > 0$. Привлечение к этому вопросу некоторой спектральной задачи является особенностью данной работы. Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема. При каждом фиксированном $z > 0$ и для любых действительных a и b , где $a^2 + b^2 > 0, ab \geq 0$, функция $aI_\nu(z) + b\frac{dI_\nu(z)}{dz}$ не имеет нулей в правой полуплоскости $\text{Re } \nu \geq 0$.

Доказательство теоремы

Рассмотрим уравнение (1). Если мы положим $z = e^{-x}, y(x) = u(e^{-x}), \nu = i\lambda$, где c – любое конечное число, то уравнение (1) примет вид

$$-y'' + q(x)y = \lambda^2 y, q(x) = e^{2(c-x)}. \quad (3)$$

Рассмотрим спектральную задачу, порождаемую на полуоси $0 \leq x < \infty$ дифференциальным уравнением (3) и краевым условием

$$\alpha y(0) - \beta y'(0) = 0, \quad (4)$$

где действительные числа α и β таковы, что $\alpha^2 + \beta^2 > 0, \alpha\beta \geq 0$. Из указанных выше подстановок следует, что функция

$$f(x, \lambda) = I_{-i\lambda}(e^{c-x}) \quad (5)$$

является решением уравнения (3). Известно [13], что $I_{-i\lambda}(z)$ для фиксированного $z > 0$ является целой функцией от λ . Тогда в силу (5) при каждом фиксированном $x, 0 \leq x < +\infty$, решение $f(x, \lambda)$ уравнения (3) служит целой функцией относительно λ . Из известного [12] соотношения

$$I_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \Gamma^{-1}(\nu+1)(1+o(1)), z \rightarrow 0,$$

следует

$$f(x, \lambda) = 2^{i\lambda} e^{-ic\lambda} e^{i\lambda x} \Gamma^{-1}(1-i\lambda)(1+o(1)), x \rightarrow +\infty. \quad (6)$$

С другой стороны, как известно [13],[14], уравнение (3) имеет единственное решение $e(x, \lambda)$ с асимптотикой $e(x, \lambda) = e^{i\lambda x}(1+o(1)), x \rightarrow +\infty$. Более того, справедливо следующее треугольное представление

$$e(x, \lambda) = e^{i\lambda x} + \int_x^{+\infty} K(x, t) e^{i\lambda t} dt, \quad (7)$$

где ядро $K(x, t)$ является непрерывно дифференцируемой функцией и удовлетворяет соотношению

$$K(x, t) = O(e^{2c-x-t}), x+t \rightarrow +\infty. \quad (8)$$

Из (5)-(8) следует, что

$$e(x, \lambda) = 2^{-i\lambda} e^{ic\lambda} \Gamma(1-i\lambda) I_{-i\lambda}(e^{c-x}). \quad (9)$$

Согласно общей теории (см. [13]) граничная задача (3)-(4) имеет непрерывный спектр, заполняющий полуось $[0, +\infty)$. Собственные значения этой задачи совпадают с квадратами нулей функции $\alpha e(0, \lambda) - \beta e'(0, \lambda)$, расположенных в верхней полуплоскости. Как известно [13], при $\lambda > 0$ функция $\alpha e(0, \lambda) - \beta e'(0, \lambda)$ не может обратиться в нуль. Далее, известно, что в общем случае, т.е. для вещественного потенциала $q(x)$ из класса $\int_0^{+\infty} x|q(x)|dx < \infty$, функция $\alpha e(0, \lambda) - \beta e'(0, \lambda)$ в полуплоскости $\text{Im } \lambda > 0$ может иметь лишь конечное число простых нулей λ_n , лежащих на мнимой оси: $\lambda_n = i\theta_n, \theta_n > 0$. При этом числа $-\theta_n^2$ служат собственными значениями граничной задачи (3)-(4). Однако ввиду положительности потенциала $q(x) = e^{2(c-x)}$ и условия $\alpha\beta \geq 0$ оператор, порожденный в $L_2(0, \infty)$ задачей (3)-(4), является положительным. Поэтому граничная задача (3)-(4) не может иметь [15] отрицательных собственных значений. Следовательно, $\alpha e(0, \lambda) - \beta e'(0, \lambda) \neq 0$ при $\text{Im } \lambda \geq 0, \lambda \neq 0$. Далее, в граничном условии (4) величины α, β могут быть произвольными числами, удовлетворяющими условиям $\alpha^2 + \beta^2 > 0, \alpha\beta \geq 0$. Очевидно, что этим

свойством обладает и числа $a = \alpha, b = \beta e^c$. Полагая тогда $z = e^c, \nu = -i\lambda$ и учитывая, что $2^{-i\lambda} e^{i\lambda} \Gamma(1-i\lambda) \neq 0$ при $\text{Im} \lambda \geq 0$ из (9) находим, что функция $aI_\nu(z) + bI'_\nu(z)$ не имеет нулей при $\text{Re} \nu \geq 0, \nu \neq 0$. Кроме того, из формулы (2) следует, что при фиксированном $z > 0$ функция $I'_\nu(z)$ не определена в точке $\nu = 0$. Следовательно, функция $aI_\nu(z) + bI'_\nu(z)$ не имеет нулей в замкнутой правой плоскости $\text{Re} \nu \geq 0$. Тем самым завершается доказательство теоремы.

Замечание. Так как для целых значений n имеет место [12] равенство $I_n(z) = I_{-n}(z)$, то из доказанной теоремы следует, что при условиях $a^2 + b^2 > 0, ab \geq 0$ нули функции $aI_\nu(z) + bI'_\nu(z)$ расположены в левой полуплоскости $\text{Re} \nu < 0$ с выколотыми точками $\nu = -n, n = 1, 2, \dots$. Более того, при отсутствии условия $ab \geq 0$ функция $aI_\nu(z) + bI'_\nu(z)$ может иметь в правой плоскости $\text{Re} \nu > 0$ лишь конечное число простых вещественных нулей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Грей Э., Мэтьюз Г.Б., Функции Бесселя и их приложения к физике и механике. – Москва: ИЛ, - 1953.
2. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. - Москва: Наука, - т. 2, - 1974.
3. Керимов М. К., Скороходов С. Л. О вычислении комплексных нулей функций Бесселя $J_\nu(z)$ и $I_\nu(z)$ и их производных // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1984. Т.24. №10. С.11497–1513.
4. Керимов М. К. Исследования о нулях специальных функции Бесселя и методах их вычисления. IV. Неравенства, оценки, разложения и др. для нулей функций Бесселя // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2018. Т.58. №1. С. 3–41.
5. Bobkov V. Asymptotic Relation For Zeros of Cross-Product of Bessel Functions and Applications // J. Math. Anal. Appl. 2019. V.472. N1. P. 1078–1092.
6. Coulomb M. J. Sur les zéros des fonctions de Bessel considérées comme fonctions de 1 ordre // Bull. Sci. Math. 1936. V.60. P.297-302.
7. Dougall J. The determination of Green's Function by means of Cylindrical or Spherical Harmonics // Proc. Edin. Math. Soc. 1900. V.18. P. 33-83.
8. Polya . Bemerkung über die integraldarstellung der Riemannschen ξ – function // Acta Math., 1926. V. 48. P. 305-317.
9. Hejhal D.A. On a result of G.Polya concerning the Riemann ξ – function // Journal Danalyse Mathematique. 1990. V. 55. P.59-95
10. Багирова С.М., Ханмамедов А.Х. О нулях модифицированной функции Бесселя II рода // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2020. Т.60. № 5, с. 837–840
11. Cochran J. A. The zeros of Hankel functions as functions of their order // Numerische Mathematik. 1965. v. 7. n. 3. P. 238-250.
12. Abramowitz V., Stegun I. N. (eds.) Handbook of mathematical functions, 10th edit., Applied Mathematical series, 55, National Bureau of Standards, Washington; Dover Publications, Inc., New York, 1964 (Пер. В.А.Диткин, Л.Н.Кармазина (ред.). Спра-

- вочник по специальным функциям. -Москва: Наука, - 1979.
13. Левитан Б.М. Обратные задачи Штурма-Лиувилля.- Москва: Наука, - 1984.
 14. Марченко В.А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. – Киев: Наук. Думка, - 1977.
 15. Fournais S., Helffer B. Spectral Methods in Surface Superconductivity. Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, vol.77, Boston: Birkhauser Boston Inc., 2010.

MODİFİKASIYA OLUNMUŞ BİRİNCİ NÖV BESSEL FUNKSIYASININ VƏ ONUN TÖRƏMƏSİNİN SIFIRLARININ PAYLANMASI

M.H.MAHMUDOVA, H.M.MƏSMƏLİYEV

XÜLASƏ

Modifikasiya olunmuş birinci növ $I_\nu(z)$ Bessel funksiyasının və onun törəməsinin ν indeksindən asılı funksiya kimi sıfırlarının paylanması araşdırılmışdır. İsbat olunmuşdur ki, qeyd olunmuş $z, z > 0$ qiymətləri üçün $a^2 + b^2 > 0, ab \geq 0$ olduqda $aI_\nu(z) + bI'_\nu(z)$ funksiyasının $\text{Re } \nu \geq 0$ sağ yarımmüstəvisində sıfırları yoxdur.

Açar sözlər: Bessel funksiyası, Bessel funksiyasının sıfırları, spektral məsələ, məxsusi ədədlər.

ON THE DISTRIBUTION OF ZEROS OF A MODIFIED BESSEL FUNCTION OF THE FIRST KIND AND ITS DERIVATIVE

M.G.MAKHMUDOVA, H.M.MASMALIYEV

SUMMARY

The zeros of a linear combination of a modified Bessel function of the first kind $I_\nu(z)$ and its derivative considered as a function of order ν are studied. It is proved that for a fixed $z, z > 0$, the function $aI_\nu(z) + bI'_\nu(z)$, where $a^2 + b^2 > 0, ab \geq 0$, has no zeros in the right half-plane $\text{Re } \nu \geq 0$.

Keywords: Bessel functions, zeros of Bessel functions, spectral problem, eigenvalues.

UOT 517.977.58

**PARABOLİK TƏNLIYIN SƏRBƏST HƏDDİNİN TAPILMASI
HAQQINDA İNTEQRAL ŞƏRTLƏRLƏ VARIASİONAL FORMADA
TƏRS MƏSƏLƏNİN FƏRQ APROKSİMASİYASI VƏ
REQULYARLAŞDIRILMASI**

Ş.İ.MƏHƏRRƏMLİ
Bakı Dövlət Universiteti
semedli.shehla@gmail.com

İşdə parabolik tənliyin sərbəst həddinin təyini haqqında integral şərtlərlə tərs məsələnin variational qoyuluşuna baxılır. Məsələnin fərq aproksimasiyalarının vəziyyətə və funksionala görə yığılma sürəti üçün qiymətləndirmələr alınmışdır.

Açar sözlər: parabolik tənlik, integral şərtlər, tərs məsələ, fərq aproksimasiyası

Xüsusi törəməli diferensial tənliklər üçün tərs məsələlər variational qoyuluşda, yəni uyğun sistemlər üçün optimal idarəetmə məsələləri kimi də ifadə oluna bilər. Belə qoyuluşlarda baxılan tənliklərin axtarılan sərbəst həddi və ya əmsalları idarəedicilərin rolunu oynayır və məqsəd funksionalı verilmiş əlavə şərtlərin əsasında tərtib olunur [1-3].

Variational formada qoyulmuş tərs məsələlərin təqribi həlli üçün istifadə olunan effektiv üsullardan biri sonlu fərqlər üsuludur. Parabolik tənliklər üçün integral şərtlərlə optimal idarəetmə məsələlərinin, o cümlədən də variational formada tərs məsələlərin fərq aproksimasiyalarının yığılması məsələləri az tədqiq olunmuşdur [4, 5].

İşdə parabolik tənliyin sərbəst həddinin təyini haqqında integral şərtlərlə variational formada tərs məsələyə baxılır. Məsələnin fərq aproksimasiyalarının vəziyyətə və funksionala görə yığılma sürəti üçün qiymətləndirmələr alınmış, idarəediciyə görə zəif yığılma isbat olunmuşdur.

1. Məsələnin qoyuluşu və onun korrektiliyi

Parabolik tənliyin sərbəst həddinin tapılması haqqında tərs məsələnin variational qoyuluşuna baxaq: tutaq ki,

$$J(v) = \int_0^l \int_0^T \alpha(t) u(x,t;v) dt - \beta(x) \Big| dx \quad (1)$$

funksionalını minimallaşdıran və aşağıdakı şərtləri ödəyən $\{v = v(x), u = u(x,t) = u(x,t;v)\}$ funksiyalar cütünü tapmaq tələb olunur:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x,t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + a(x,t)u = f(x,t) + v(x)g(t), \quad (x,t) \in Q_T, \quad (2)$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (3)$$

$$u(0,t) = 0, \quad k(l,t) \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = \int_0^l H(x,t) u(x,t) dx, \quad 0 < t \leq T, \quad (4)$$

$$v = v(x) \in V = \{v = v(x) \in L_2(0,l) : \|v\|_{2,(0,l)} \leq R\}. \quad (5)$$

Burada $l, T, R > 0$ -verilmiş ədədlər; $Q_T = \{(x,t) : 0 < x < l, 0 < t \leq T\}$ -düzbucaqlı; $k(x,t), a(x,t), f(x,t), H(x,t), \alpha(t), \beta(x), \varphi(x), g(t)$ -aşağıdakı şərtləri ödəyən verilmiş ölçülən funksiyalardır:

$$0 < v \leq k(x,t) \leq \mu, \quad \left| \frac{\partial k(x,t)}{\partial x} \right| \leq \mu, \quad \left| \frac{\partial k(x,t)}{\partial t} \right| \leq \mu, \quad |a(x,t)| \leq \mu, \quad |H(x,t)| \leq \mu_1,$$

$$\left| \frac{\partial H(x,t)}{\partial t} \right| \leq \mu_1, \quad Q_T \text{ -də sanki hər yerdə, } v, \mu, \mu_1 = \text{const} > 0,$$

$$f(x,t) \in L_2(Q_T), \varphi(x) \in W_{2,0}^1(0,l), \alpha(t) \in W_2^1(0,T), \beta(x) \in W_2^1(0,l), g(t) \in W_2^1(0,T). \quad (6)$$

Qeyd edək ki, (1)-(5) məsələsi (2) tənliyi üçün (3)-(5) şərtlərini və əlavə

$$\int_0^T \alpha(t) u(x,t;v) dt = \beta(x), \quad x \in (0,l)$$

inteqral şərtini ödəyən $\{v(x), u(x,t;v)\}$ funksiyalar cütünün tapılması haqqında tərs məsələnin variasional formada qoyuluşudur.

İşdə istifadə olunan funksional fəzalar və onların normaları üçün [6, s. 23]-də qəbul edilmiş işarələmələrdən istifadə olunur. Bundan başqa, qiymətləndirilən kəmiyyətlərdən, mümkün idarəedicilərdən və aşağıda daxil olunan şəbəkələrin addımlarından asılı olmayan müsbət sabitləri M ilə işarə edəcəyik.

Hər bir qeyd olunmuş $v = v(x) \in V$ üçün (2)-(4) sərhəd məsələsinin $V_2^{1,0}(Q_T)$ fəzasından olan ümumiləşmiş həlli $V_2^{1,0}(Q_T) = \{u : u \in V_2^{1,0}(Q_T), u(0,t) = 0, 0 < t \leq T\}$ sinfindən olan elə $u = u(x,t) = u(x,t;v)$ funksiyasına deyilir ki, ixtiyari $\eta = \eta(x,t) \in \hat{W}_2^{1,1}(Q_T) = \{\eta = \eta \in W_2^{1,1}(Q_T), \eta(0,t) = 0, 0 < t \leq T, \eta(x,T) = 0, 0 \leq x \leq l\}$ üçün aşağıdakı inteqral eyniliyi ödəsin:

$$\int_{Q_T} \left(-u \frac{\partial \eta}{\partial t} + k \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + au\eta \right) dx dt - \int_0^T \left[\int_0^l H(x,t) u(x,t) dx \right] \eta(l,t) dt =$$

$$= \int_0^l \varphi \eta(x,0) dx + \int_{Q_T} (f + v g) \eta dx dt.$$

[7] işinin nəticələrindən alınır ki, hər bir qeyd olunmuş $v = v(x) \in L_2(0,l)$ üçün (2)-(4) sərhəd məsələsinin $V_2^{1,0}(Q_T)$ -dən olan yeganə ümumiləşmiş həlli vardır və aşağıdakı qiymətləndirmə doğrudur:

$$\|u\|_{Q_T} \equiv \|u\|_{V_2^{1,0}(Q_T)} \leq M \left[\|\varphi\|_{L_2(0,l)} + \|v\|_{L_2(0,l)} \|g\|_{L_1(0,T)} + \|f\|_{L_2(0,T)} \right]. \quad (7)$$

Bundan başqa, (2)-(4) sərhəd məsələsinin $V_2^{1,0}(Q_T)$ -dən olan ümumiləşmiş həlləri həm də $W_2^{1,1}(Q_T)$ fəzasına daxildir və

$$\max_{0 \leq t \leq T} \left\| \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \right\|_{L_2(0,l)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L_2(Q_T)} \leq M \left[\|\varphi\|_{L_2(0,l)}^{(1)} + \|f\|_{L_2(Q_T)} + \|v\|_{L_2(0,l)} \|g\|_{L_2(0,T)} \right] \quad (8)$$

qiymətləndirməsi doğrudur.

Nəhayət, [8] işinin nəticələrindən alınır ki, (1)-(5) məsələsinin optimal idarəedicilər çoxluğu $V_* = \{v_* = v_*(x) \in V : J(v_*) = J_* \equiv \inf \{J(v) : v \in V\}\}$ boş deyil, $L_2(0,l)$ -də zəif kompakt çoxluqdur və ixtiyari minimallaşdırıcı $\{v_n\} \subset V$ ardıcılığı V_* çoxluğuna $L_2(0,l)$ -də zəif yığılır.

2. Məsələnin fərq aproksimasiyası və onun korrekliyi

(1)-(5) məsələsinin aproksimasiyası üçün $[0,l], [0,T]$ parçalarında və \bar{Q}_T düzbucaqlısında aşağıdakı şəbəkələri daxil edək:

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_h &= \{x_i = ih \in [0,l] : i = 0,1,\dots,N, Nh = l\}, \quad \omega_h = \bar{\omega}_h \cap (0,l), \quad \omega_h^+ = \bar{\omega}_h \cap (0,l], \\ \omega_\tau &= \{t_j = j\tau \in [0,T] : j = 1,2,\dots,L, L\tau = T\}, \quad \omega_\tau = \omega_h \times \omega_\tau, \quad \omega_\tau^+ = \omega_h^+ \times \omega_\tau, \quad \bar{\omega}_T = \bar{\omega}_h \times \omega_\tau, \\ \omega_\tau^+ &= \omega_h^+ \times \{t' = \tau, 2\tau, \dots, t\}, \quad t \in \omega_\tau. \end{aligned}$$

Tutaq ki, $x \in \omega_h$ olduqda $\bar{h} = \bar{h}(x) = h$ və $\bar{h}(0) = \bar{h}(l) = 0.5h$. Bundan başqa, aşağıdakı elementar oyuqları daxil edək:

$$\begin{aligned} e_1^*(x) &= \{\xi : x - h \leq \xi < x\}, \quad x \in \omega_h^+; \quad e_1(0) = \{\xi : 0 \leq \xi < 0.5h\}, \\ e_1(x) &= \{\xi : x - 0.5h \leq \xi < x + 0.5h\}, \quad x \in \omega_h, \quad e_1(l) = \{\xi : l - 0.5h \leq \xi \leq l\}, \\ e_2(t) &= \{\theta : t - \tau \leq \xi < t\}, \quad t \in \omega_\tau; \quad e^*(x,t) = e_1^*(x) \times e_2(t), \quad (x,t) \in \omega_\tau^+; \\ e(x,t) &= e_1(x) \times e_2(t), \quad (x,t) \in \bar{\omega}_T. \end{aligned}$$

Aşağıdakı Steklov məna S^x, S_-^x, S_-^t ortalaşdırma operatorlarından istifadə edəcəyik:

$$S^x u(x,t) = \frac{1}{\bar{h}(x) e_1(x)} \int u(\xi,t) d\xi, \quad S_-^x u(x,t) = \frac{1}{h e_1^+(x)} \int u(\xi,t) d\xi, \quad S_-^t u(x,t) = \frac{1}{\tau e_2(t)} \int u(x,\theta) d\theta.$$

S^x və S_-^t operatorlarının hasilini S^{tx} ilə işarə edək: $S^{tx} = S_-^t S^x$.

Uyğun şəbəkələrdə verilmiş funksiyalar üçün aşağıdakı skalyar hasilləri və normaları daxil edək:

$$\begin{aligned}
(y, z)_{\omega_h^*} &= \sum_{\omega_h^*} \hbar yz, \|y\|_{2, \omega_h^*} = (y, y)_{\omega_h^*}^{1/2}, (y, z)_{\omega_\tau} = \sum_{\omega_\tau} \tau yz, \|y\|_{2, \omega_\tau} = (y, y)_{\omega_\tau}^{1/2}, \\
(y, z)_{\omega_\tau^*} &= \sum_{\omega_\tau^*} \tau (y, z)_{\omega_h^*}, \|y\|_{2, \omega_\tau^*} = (y, y)_{\omega_\tau^*}^{1/2}, (y_x^-, z_x^-)_{\omega_h^*} = \sum_{\omega_h^*} \hbar y_x^- z_x^-, \|y_x^-\|_{2, \omega_h^*} = (y_x^-, y_x^-)_{\omega_h^*}^{1/2}, \\
\|y\|_{1, \omega_\tau} &= \tau \sum_{\omega_\tau} |y|, \|y\|_{2, 1, \omega_\tau^*} = \tau \sum_{\omega_\tau} \|y(x, t)\|_{2, \omega_h^*}, \\
(y_x^-, z_x^-)_{\omega_\tau^*} &= \sum_{\omega_\tau^*} \tau (y_x^-, z_x^-)_{\omega_h^*}, \|y_x^-\|_{2, \omega_\tau^*} = (y_x^-, y_x^-)_{\omega_\tau^*}^{1/2}, \\
|y|_{\omega_\tau^*} &\equiv \|y\|_{V_2^{1,0}(\omega_\tau^*)} = \max_{0 \leq t' \leq t} \|y(x, t')\|_{2, \omega_h^*} + \|y_x^-\|_{2, \omega_\tau^*}, \quad t \in \omega_\tau, \\
\theta(t, y) &\equiv |y|_{\omega_\tau^*} + \sqrt{\tau} \|y_\tau(x, t)\|_{2, \omega_\tau^*}, \quad t \in \omega_\tau.
\end{aligned}$$

(1)-(5) məsələsini aşağıdakı fərq sxemi ilə approksimasiya edək:

$$J_{h\tau}(v_h) = \sum_{x \in \omega_h^*} \hbar \left| \tau \sum_{t \in \omega_\tau} \alpha_\tau(t) y(x, t; v_h) - \beta_h(x) \right|^2 \quad (9)$$

şəbəkə funksionalını minimallaşdıran və aşağıdakı şərtləri ödəyən $\{v_h = v_h(x), y = y(x, t) = y(x, t; v_h)\}$ şəbəkə funksiyalar cütünü tapmaq tələb olunur:

$$y_\tau - (k_{h\tau}(x - 0.5h, t) y_x^-)_x + a_{h\tau}(x, t) y = f_{h\tau}(x, t) + v_h(x) g_\tau(t), \quad (x, t) \in \omega_\tau, \quad (10)$$

$$y(x, 0) = \varphi_h(x), \quad x \in \bar{\omega}_h, \quad (11)$$

$$\begin{aligned}
y(0, t) &= 0, \quad k_{h\tau}(l - 0.5h, t) y_x^-(l, t) = \sum_{x \in \omega_h^*} \hbar H_{h\tau}(x, t) y(x, t) - \\
&- 0.5h [y_\tau(l, t) + a_{h\tau}(l, t) y(l, t) - f_{h\tau}(l, t) - v_h(l) g_\tau(t)], \quad t \in \omega_\tau, \quad (12)
\end{aligned}$$

$$v_h = v_h(x) \in V_h = \{v_h = v_h(x) \in L_2(\omega_h^*): \|v_h\|_{2, \omega_h^*} \leq R\}. \quad (13)$$

Burada $k_{h\tau}, a_{h\tau}, f_{h\tau}, H_{h\tau}, \varphi_h, \beta_h, \alpha_\tau, g_\tau$ şəbəkə funksiyaları aşağıdakı bərabərliklərlə təyin olunur: $k_{h\tau}(x - 0.5h, t) = S'_- k(x - 0.5h, t)$, $a_{h\tau}(x, t) = S^{xx} a(x, t)$, $f_{h\tau}(x, t) = S^{xx} f(x, t)$, $H_{h\tau}(x, t) = S_-^x H(x, t)$, $(x, t) \in \omega_\tau^+$, $\varphi_h(x) = S^x \varphi(x)$, $x \in \bar{\omega}_h$, $\beta_h(x) = S^x \beta(x)$, $x \in \omega_h^+$, $\alpha_\tau(t) = S'_- \alpha(t)$, $g_\tau(t) = S'_- g(t)$, $t \in \omega_\tau$.

(10)-(12) məsələsini aşağıdakı şəkildə göstərə bilərik:

$$y_\tau = Ay + F_{h\tau}(x, t), \quad (x, t) \in \omega_\tau^+, \quad (14)$$

$$y(x, 0) = \varphi_h(x), \quad x \in \bar{\omega}_h, \quad (15)$$

$$y(0, t) = 0, \quad t \in \omega_\tau, \quad (16)$$

burada

$$Ay = \begin{cases} (k_{h\tau}(x - 0.5h, t) y_x^-)_x - a_{h\tau}(x, t) y, & (x, t) \in \omega_\tau, \\ -\frac{2}{h} k_{h\tau}(l - 0.5h, t) y_x^-(l, t) - a_{h\tau}(l, t) y(l, t) + \frac{2}{h} \sum_{\omega_h^*} \hbar H_{h\tau}(x, t) y(x, t), & t \in \omega_\tau, \end{cases}$$

$$F_{h\tau}(x, t) = f_{h\tau}(x, t) + v_h(x) g_\tau(t), \quad (x, t) \in \omega_\tau^+.$$

Teorem 1. Tutaq ki, (6) şərtləri ödənilir və

$$\tau < \tau_0 = \frac{1}{2} \left[2\mu + \mu_1^2 l + \frac{1}{\nu} + \frac{1}{l} \right]^{-1} \left(2 + \nu^{-1/2} \right)^2 \quad (17)$$

bərabərsizliyi doğrudur. Onda hər bir qeyd olunmuş $v_h \in V_h$ üçün (10)-(12) məsələsinin yeganə həlli vardır və aşağıdakı apriori qiymətləndirmə doğrudur:

$$\begin{aligned} & \|y(x, t; v_h)\|_{V_2^{1,0}(\omega_\tau^*)} + \sqrt{\tau} \|y_i(x, t; v_h)\|_{2, \omega_\tau^*} \leq \\ & \leq M \left[\|\varphi_h\|_{2, \omega_h^*} + 2\|f_{h\tau}\|_{2, 1, \omega_\tau^*} + 2\|v_h\|_{2, \omega_h^*} \|g_\tau\|_{1, \omega_\tau^*} \right]. \end{aligned} \quad (18)$$

İsbatı. Müəyyən $t \in \omega_\tau$ nöqtəsini götürək. (14) tənliyinin hər iki tərəfini $(\cdot)_{\omega_h^*}$ skalyar hasilı şəklində $\mathfrak{y}(x, t'; v_h)$ funksiyasına vuraq və alınan bərabərliyi $t' = \tau$ -dan $t' = t$ -yə qədər cəmləyək. Onda aşağıdakı bərabərliyi alırıq:

$$\sum_{t'=\tau}^t (\mathfrak{y}_i(x, t'), \mathfrak{y}(x, t'))_{2, \omega_h^*} = \sum_{t'=\tau}^t (Ay(x, t'), \mathfrak{y}(x, t'))_{2, \omega_h^*} + \sum_{t'=\tau}^t (F_{h\tau}(x, t'), \mathfrak{y}(x, t'))_{2, \omega_h^*},$$

burada $y(x, t) = y(x, t; v_h)$. Bu bərabərlikdə A operatorunun və $F_{h\tau}$ funksiyasının ifadələrini nəzərə alsaq, sonra $y_i y = 0.5(y^2)_i + 0.5\mathfrak{y}_i^2$, $(x, t) \in \omega_\tau^*$ bərabərliyini və x -ə görə hissə-hissə cəmləmə düsturunu istifadə etsək, aşağıdakı bərabərliyi alırıq:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|y(x, t)\|_{2, \omega_h^*}^2 + \tau \sum_{t'=\tau}^t h \sum_{x \in \omega_h^*} k_{h\tau} (x - 0.5h, t') y_x^2(x, t') + \frac{1}{2} \tau^2 \sum_{t'=\tau}^t \|y_i(x, t')\|_{2, \omega_h^*}^2 = \\ & = \frac{1}{2} \|y(x, 0)\|_{2, \omega_h^*}^2 - \tau \sum_{t'=\tau}^t (a_{h\tau}(x, t'), y^2(x, t'))_{2, \omega_h^*} + \tau \sum_{t'=\tau}^t (H_{h\tau}(x, t'), y(x, t'))_{2, \omega_h^*} y(t, t') + \\ & + \tau \sum_{t'=\tau}^t (v_h(x) g_\tau(t') + f_{h\tau}(x, t'), y(x, t'))_{2, \omega_h^*}. \end{aligned} \quad (19)$$

(19) bərabərliyinin sol və sağ tərəfindəki hədləri qiymətləndirərək və $y(x, t)$, $x \in \bar{\omega}_h$ şəbəkə funksiyası üçün

$$y^2(t, t) \leq \varepsilon \|y_x(x, t)\|_{2, \omega_h^*}^2 + \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{l} \right) \|y(x, t)\|_{2, \omega_h^*}^2, \quad \varepsilon > 0 \quad (20)$$

bərabərsizliyini [9, s. 290] və ε -la Koşi bərabərsizliyini istifadə edərək alırıq:

$$\begin{aligned} & \|y(x, t)\|_{2, \omega_h^*}^2 + 2 \left(\nu - \mu_1 \sqrt{l} \frac{\varepsilon}{2\varepsilon_1} \right) \tau \sum_{t'=\tau}^t \|y_x(x, t')\|_{2, \omega_h^*}^2 \leq \|y(x, 0)\|_{2, \omega_h^*}^2 + 2(\mu + c) \tau \sum_{t'=\tau}^t \|y(x, t')\|_{2, \omega_h^*}^2 + \\ & + 2\tau \sum_{t'=\tau}^t \left(\|v_h(x)\|_{2, \omega_h^*} \|g_\tau(t')\| + \|f_{h\tau}(x, t')\|_{2, \omega_h^*} \right) \times \max_{0 \leq t' \leq t} \|y(x, t')\|_{2, \omega_h^*}, \end{aligned} \quad (21)$$

burada $c = \mu_1 \sqrt{l} \left[\frac{\varepsilon_1}{2} + \frac{1}{2\varepsilon_1} \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{l} \right) \right]$.

Əgər (21)-də $\varepsilon = \nu$, $\varepsilon_1 = \mu_1 \sqrt{l}$ seçsək, $\gamma(t) = \max_{0 \leq t' \leq t} \|y(x, t')\|_{2, \omega_h^*}$ kimi işarə etsək və $\tau \sum_{t'=\tau}^t \|y(x, t')\|_{2, \omega_h^*}^2 \leq t\gamma^2(t)$, $\|y(x, 0)\|_{2, \omega_h^*}^2 \leq \gamma(t) \|y(x, 0)\|_{2, \omega_h^*}^2$ bərabərsizliklərini

nəzərə alsaq, aşağıdakı qiymətləndirməni alırıq:

$$\begin{aligned} & \|y(x,t)\|_{2,\omega_x^*}^2 + \nu \tau \sum_{t'=\tau}^t \|y_x(x,t')\|_{2,\omega_x^*}^2 + \tau^2 \sum_{t'=\tau}^t \|y_t(x,t')\|_{2,\omega_x^*}^2 \leq \\ & \leq \gamma(t) \left[\|y(x,0)\|_{2,\omega_x^*} + 2\|v_h(x)\|_{2,\omega_x^*} \tau \sum_{t'=\tau}^t |g_\tau(t')| + 2\tau \sum_{t'=\tau}^t \|f_{h\tau}(x,t')\|_{2,\omega_x^*} \right] + c_1 t \gamma^2(t) \equiv \delta(t), \quad t \in \omega_\tau, \quad (22) \end{aligned}$$

burada $c_1 = 2\mu + \mu_1^2 l + \nu^{-1} + l^{-1}$.

(22)-dən nəticə kimi aşağıdakı üç bərabərsizliyi alırıq:

$$\gamma^2(t) \leq \delta(t), \quad \tau \sum_{t'=\tau}^t \|y_x(x,t')\|_{2,\omega_x^*}^2 \leq \nu^{-1} \delta(t), \quad \tau^2 \sum_{t'=\tau}^t \|y_t(x,t')\|_{2,\omega_x^*}^2 \leq \delta(t), \quad t \in \omega_\tau.$$

Bu bərabərsizliklərin hər iki tərəfindən kvadrat kök alaıq, alınan bərabərsizlikləri toplayaq və sağ tərəfi aşağıdakı şəkildə qiymətləndirək:

$$\begin{aligned} \theta(t,y) & \equiv \max_{0 \leq t' \leq t} \|y(x,t')\|_{2,\omega_x^*} + \left(\tau \sum_{t'=\tau}^t \|y_x(x,t')\|_{2,\omega_x^*}^2 \right)^{1/2} + \sqrt{\tau} \left(\tau \sum_{t'=\tau}^t \|y_t(x,t')\|_{2,\omega_x^*}^2 \right)^{1/2} \leq \\ & \leq (2 + \nu^{-1/2}) \delta^{1/2}(t) \leq (2 + \nu^{-1/2}) \sqrt{c_1 t} \theta(t,y) + (2 + \nu^{-1/2}) \theta^{1/2}(t,y) \times \\ & \times \left[\|y(x,0)\|_{2,\omega_x^*} + 2\|v_h(x)\|_{2,\omega_x^*} \tau \sum_{t'=\tau}^t |g_\tau(t')| + 2\tau \sum_{t'=\tau}^t \|f_{h\tau}(x,t')\|_{2,\omega_x^*}^2 \right]^{1/2}, \quad t \in \omega_\tau. \end{aligned}$$

Onda (17) şərtini istifadə edərək $t < 2\tau_0$ aşağıdakı qiymətləndirməni alırıq:

$$\begin{aligned} \theta(t,y) & \leq \left[1 - (2 + \nu^{-1/2}) \sqrt{c_1 t} \right]^{-2} (2 + \nu^{-1/2})^2 \times \\ & \times \left[\|y(x,0)\|_{2,\omega_x^*} + 2\|v_h(x)\|_{2,\omega_x^*} \tau \sum_{t'=\tau}^t |g_\tau(t')| + 2\tau \sum_{t'=\tau}^t \|f_{h\tau}(x,t')\|_{2,\omega_x^*}^2 \right], \quad t \in \omega_\tau. \quad (23) \end{aligned}$$

$[0, T]$ parçasını uzunluqları τ_0 -dan böyük olmayan $\Delta_1 = [0, \tau_0], \Delta_2 = [\tau_0, 2\tau_0], \dots, \Delta_n$ parçalarına ayıraq. Bu parçaların hər biri üçün (23) şəkildə qiymətləndirmə doğrudur. Həmin qiymətləndirmələrdən və $\|y(x,t)\|_{2,\omega_x^*} \leq |y|_{\omega_x^*}, t \in \omega_\tau$ bərabərsizliyindən istifadə edərək aşağıdakı qiymətləndirməni alırıq:

$$\theta(t,y) \leq c(t) \times \left[\|y(x,0)\|_{2,\omega_x^*} + 2\|v_h(x)\|_{2,\omega_x^*} \left(\tau \sum_{t'=\tau}^t |g_\tau(t')| \right) + 2\tau \sum_{t'=\tau}^t \|f_{h\tau}(x,t')\|_{2,\omega_x^*}^2 \right], \quad t \in \omega_\tau, \text{ burada}$$

$c(t)$ funksiyası ν, μ, μ_1, l, T kəmiyyətləri ilə təyin olunur. Bu bərabərsizlikdə $t = T$ seçərək (18) qiymətləndirməsini alırıq. Teorem 1 isbat olundu.

(18) qiymətləndirməsindən istifadə edərək göstərmək olar ki, hər bir qeyd olunmuş (h, τ) üçün (10)-(12) məsələsinin $V_{h^*} = \{v_{h^*} \in V_h : J_{h\tau}(v_{h^*}) = J_{h\tau^*} \equiv \inf \{J_{h\tau}(v_h) : v_h \in V_h\}\}$ optimal idarəedicilər çoxluğu boş deyildir.

3. Sonlu fərqlər üsulunun vəziyyətə görə xəta qiymətləndirməsi

Fərz edək ki, hər bir qeyd olunmuş $v(\xi) \in V$ üçün (2)-(4) sərhəd məsələsinin $V_2^{1,0}(Q_\tau)$ -dən olan ümumiləşmiş həlli $W_{2,0}^{2,1}(Q_\tau)$ sinfinə daxildir.

Tutaq ki, $v(\xi) \in V, v_h(x) \in V_h$ -ixtiyari idarəedicilər, $u(\xi, \theta) = u(\xi, \theta; v), y(x, t) = y(x, t; v_h)$ -(2)-(4) və (10)-(12) məsələlərinin $v(\xi)$ və $v_h(x)$

idarəedicilərinə uyğun həlləridir. $y(x,t;v_h)$ şəbəkə funksiyasını (2)-(4) məsələsinin həllinin

$$\bar{u}(x,t) = \begin{cases} S^t u(x,t), & (x,t) \in \omega_T^+, \\ S^x \varphi(x), & x \in \bar{\omega}_h, t=0, \\ 0, & x=0, t \in \omega_\tau \end{cases} \quad (24)$$

bərabərliyi ilə təyin olunan $\bar{u}(x,t) = \bar{u}(x,t;v)$ ortalaşdırılması ilə müqayisə edəcəyik.

Tutaq ki, $z(x,t) = z(x,t;v, v_h) = y(x,t;v_h) - \bar{u}(x,t;v)$ sonlu fərqlər üsulunun vəziyyətdə görə xətasıdır. (14)-(16) şərtlərini istifadə edərək $z(x,t)$ funksiyası üçün aşağıdakı məsələni alırıq:

$$z_\tau = Az + \psi_{h\tau}(x,t), \quad (x,t) \in \omega_T^+, \quad (25)$$

$$z(x,0) = 0, \quad x \in \bar{\omega}_h, \quad (26)$$

$$z(0,t) = 0, \quad t \in \omega_\tau, \quad (27)$$

burada $\psi_{h\tau}(x,t) = F_{h\tau}(x,t) + A\bar{u} - \bar{u}_\tau$, $(x,t) \in \bar{\omega}_T$ - (14)-(16) məsələsinin aproksimasiya xətasıdır.

(2) tənliyində $(x,t) \in \bar{\omega}_T$ düyün nöqtələrində S^{tx} ortalaşdırma operatorunu tətbiq etsək, müəyyən çevirmələrin köməyi ilə $\psi_{h\tau}$ funksiyası üçün aşağıdakı ifadəni alırıq:

$$\psi_{h\tau}(x,t) = \begin{cases} \eta^{(1)}(x,t) + \eta^{(2)}(x,t) + \eta^{(3)}(x,t) + \eta^{(4)}(x,t), & (x,t) \in \omega_T, \\ -\frac{2}{h}\eta^{(1)}(x,t) + \eta^{(2)}(x,t) + \eta^{(3)}(x,t) + \eta^{(4)}(x,t) + \frac{2}{h}\eta^{(5)}(t), & x=l, t \in \omega_\tau, \end{cases} \quad (28)$$

burada

$$\eta^{(1)}(x,t) = S_-^t(k(x-0.5h,t))\bar{u}_x - S_-^t\left(k(x-0.5h,t)\frac{\partial u(x-0.5h,t)}{\partial x}\right), \quad (x,t) \in \omega_T^+, \quad (29)$$

$$\eta^{(2)}(x,t) = S^{tx}(a(x,t)u(x,t)) - S^{tx}(a(x,t))\bar{u}(x,t), \quad (x,t) \in \omega_T^+, \quad (30)$$

$$\eta^{(3)}(x,t) = S^x u(x,t) - \bar{u}(x,t), \quad (x,t) \in \omega_T^+, \quad (31)$$

$$\eta^{(4)}(x,t) = v_h(x)S_-^t g(t) - S^{tx}(v(x)g(t)), \quad (x,t) \in \omega_T^+, \quad (32)$$

$$\eta^{(5)}(t) = \sum_{x \in \omega_h} h S_-^x (H(x,t)\bar{u}(x,t)) - S_-^t \left(\int_0^l H(x,t)u(x,t)dx \right), \quad t \in \omega_\tau. \quad (33)$$

Teorem 2. Tutaq ki, (6), (17) şərtləri ödənilir və (2)-(4) məsələsinin $V_2^{1,0}(Q_T)$ -dən olan ümumiləşmiş həlli $W_{2,0}^{2,1}(Q_T)$ sinfinə daxildir. Onda (25)-(27) məsələsinin həlli üçün aşağıdakı qiymətləndirmə doğrudur:

$$\begin{aligned} & \|z(x,t)\|_{V_2^{1,0}(\omega_T^+)} + \sqrt{\tau} \|z_\tau(x,t)\|_{L_2(\omega_T^+)} \leq \\ & \leq M \left[\|\eta^{(1)}\|_{L_2(\omega_T^+)} + \|\eta^{(2)}\|_{L_2(\omega_T^+)} + \left(\sum_{t \in \omega_\tau} \|\eta^{(3)}(x,t)\|_{L_2(\omega_h)}^2 \right)^{1/2} + \|\eta^{(4)}\|_{L_2(\omega_T^+)} + \|\eta^{(5)}\|_{L_2(\omega_\tau)} \right]. \end{aligned} \quad (34)$$

İsbati.(25) tənliyinin hər iki tərəfini $(\cdot)_{\omega_\tau}$ skalyar hasilı şəklində $z(x, t')$ funksiyasına vuraq və alınan bərabərliyi $t' = \tau$ -dan $t' = t$ -yə qədər cəmləyək, burada $t \in \omega_\tau$ -müəyyən nöqtədir. Sonra (19) bərabərliyinin alınması zamanı istifadə olunan mülahizələrdən istifadə edərək aşağıdakı bərabərliyi alırıq:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|z(x, t)\|_{2, \omega_\tau}^2 + \tau \sum_{t'=\tau}^t h \sum_{x \in \omega_h^*} k_{h\tau}(x - 0.5h, t') z_x^2(x, t) + \frac{1}{2} \tau^2 \sum_{t'=\tau}^t \|z_{t'}(x, t')\|_{2, \omega_\tau}^2 = \\ & = -\tau \sum_{t'=\tau}^t (a_{h\tau}(x, t'), z^2(x, t'))_{2, \omega_h^*} + \tau \sum_{t'=\tau}^t (H_{h\tau}(x, t'), z(x, t'))_{2, \omega_h^*} z(t, t') - \tau \sum_{t'=\tau}^t (\eta^{(1)}(x, t'), z_x^-(x, t'))_{2, \omega_h^*} + \\ & + \tau \sum_{t'=\tau}^t (\eta^{(2)}(x, t'), z(x, t'))_{2, \omega_h^*} - \tau \sum_{t'=0}^{t-\tau} (\eta^{(3)}(x, t'), z_t(x, t'))_{2, \omega_h^*} + (\eta^{(3)}(x, t), z(x, t))_{2, \omega_h^*} + \\ & + \tau \sum_{t'=\tau}^t (\eta^{(4)}(x, t'), z(x, t'))_{2, \omega_h^*} + \tau \sum_{t'=\tau}^t \eta^{(5)}(t') z(t, t'), \quad t \in \omega_\tau. \end{aligned} \quad (35)$$

Bu bərabərliyin sol və sağ tərəflərini qiymətləndirək. Cəm üçün Koşi-Bunyakovski bərabərsizliyindən, ε -la Koşi bərabərsizliyindən, $z(x, t)$ funksiyası üçün (20) bərabərsizliyindən istifadə edərək (21) qiymətləndirməsinin analoqu olan aşağıdakı bərabərsizliyi alırıq:

$$\begin{aligned} & \|z(x, t)\|_{2, \omega_h^*}^2 + 2 \left(\nu - \mu_1 \sqrt{l} \frac{\varepsilon}{2\varepsilon_1} \right) \tau \sum_{t'=\tau}^t \|z_x^-(x, t')\|_{2, \omega_h^*}^2 + \tau^2 \sum_{t'=\tau}^t \|z_{t'}(x, t')\|_{2, \omega_h^*}^2 \leq \\ & \leq c_1 \sum_{t'=\tau}^t \|z(x, t')\|_{2, \omega_h^*}^2 + 2 \max_{0 \leq t' \leq t} \|z(x, t')\|_{2, \omega_h^*} \times \\ & \times \left\{ \sqrt{T} \left[\left(\tau \sum_{t'=\tau}^t \|\eta^{(2)}(x, t')\|_{2, \omega_h^*}^2 \right)^{1/2} + \left(\tau \sum_{t'=\tau}^t \|\eta^{(4)}(x, t')\|_{2, \omega_h^*}^2 \right)^{1/2} \right] + \|\eta^{(3)}(x, t)\|_{2, \omega_h^*} \right\} + \\ & + 2 \left(\tau \sum_{t'=\tau}^t \|\eta^{(1)}(x, t')\|_{2, \omega_h^*}^2 \right)^{1/2} \left(\tau \sum_{t'=\tau}^t \|z_x^-(x, t')\|_{2, \omega_h^*}^2 \right)^{1/2} + 2 \left(\tau \sum_{t'=0}^{t-\tau} \|\eta^{(3)}(x, t')\|_{2, \omega_h^*}^2 \right)^{1/2} \left(\tau^2 \sum_{t'=\tau}^t \|z_{t'}(x, t')\|_{2, \omega_h^*}^2 \right)^{1/2} + \\ & + 2 \left(\tau \sum_{t'=\tau}^t \|\eta^{(5)}(t')\|^2 \right)^{1/2} \left\{ \tau \sum_{t'=\tau}^t \left[\varepsilon \|z_x^-(x, t')\|_{2, \omega_h^*}^2 + \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{l} \right) \|z(x, t')\|_{2, \omega_h^*}^2 \right] \right\}^{1/2}, \quad t \in \omega_\tau, \end{aligned} \quad (36)$$

burada $c_1 = 2(\mu + c)$, $c = \mu_1 \sqrt{l} \left[\frac{\varepsilon_1}{2} + \frac{1}{2\varepsilon_1} \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{l} \right) \right]$.

Bu bərabərlikdə $\varepsilon = \nu$, $\varepsilon_1 = \mu_1 \sqrt{l}$ seçək və onun sağ tərəfinə daxil olan hədlər üçün

$$\begin{aligned} & \tau \sum_{t'=\tau}^t \|z(x, t')\|_{2, \omega_h^*}^2 \leq t \left(\max_{0 \leq t' \leq t} \|z(x, t')\|_{2, \omega_h^*} \right)^2, \\ & \left\{ \tau \sum_{t'=\tau}^t \left[\nu \|z_x^-(x, t')\|_{2, \omega_h^*}^2 + \left(\frac{1}{\nu} + \frac{1}{l} \right) \|z(x, t')\|_{2, \omega_h^*}^2 \right] \right\}^{1/2} \leq \\ & \leq \sqrt{\nu} \left(\tau \sum_{t'=\tau}^t \|z_x^-(x, t')\|_{2, \omega_h^*}^2 \right)^{1/2} + \sqrt{T \left(\frac{1}{\nu} + \frac{1}{l} \right) \max_{0 \leq t' \leq t} \|z(x, t')\|_{2, \omega_h^*}} \leq \end{aligned}$$

$$\leq c_2 \left[\max_{0 \leq t' \leq t} \|z(x, t')\|_{2, \omega_h^*} + \left(\tau \sum_{t'=\tau}^t \|z_{\bar{x}}(x, t')\|_{2, \omega_h^*}^2 \right)^{1/2} \right],$$

$$c_2 = \max \left(\sqrt{\nu}, \sqrt{T \left(\frac{1}{\nu} + \frac{1}{l} \right)} \right)$$

bərabərsizliklərini istifadə edək. Onda

$$\gamma(t) = \max_{0 \leq t' \leq t} \|z(x, t')\|_{2, \omega_h^*}$$

kimi işarə edərək (36)-dan aşağıdakı qiymətləndirməni alırıq:

$$\begin{aligned} & \|z(x, t)\|_{2, \omega_h^*}^2 + \nu \tau \sum_{t'=\tau}^t \|z_{\bar{x}}(x, t')\|_{2, \omega_h^*}^2 + \tau^2 \sum_{t'=\tau}^t \|z_{\bar{t}}(x, t')\|_{2, \omega_h^*}^2 \leq c_1 t \gamma^2(t) + c_3 \gamma(t) \times \\ & \times \left\{ \left(\tau \sum_{t'=\tau}^t \|\eta^{(2)}(x, t')\|_{2, \omega_h^*}^2 \right)^{1/2} + \left(\tau \sum_{t'=\tau}^t \|\eta^{(4)}(x, t')\|_{2, \omega_h^*}^2 \right)^{1/2} + \|\eta^{(3)}(x, t)\|_{2, \omega_h^*} \right\} + \\ & + 2 \left(\tau \sum_{t'=\tau}^t \|\eta^{(1)}(x, t')\|_{2, \omega_h^*}^2 \right)^{1/2} \left(\tau \sum_{t'=\tau}^t \|z_{\bar{x}}(x, t')\|_{2, \omega_h^*}^2 \right)^{1/2} + 2 \left(\tau \sum_{t'=0}^{t-\tau} \|\eta^{(3)}(x, t')\|_{2, \omega_h^*}^2 \right)^{1/2} \left(\tau^2 \sum_{t'=\tau}^t \|z_{\bar{t}}(x, t')\|_{2, \omega_h^*}^2 \right)^{1/2} + \\ & + 2c_2 \left(\tau \sum_{t'=\tau}^t \|\eta^{(5)}(t')\|^2 \right)^{1/2} \left\{ \gamma(t) + \left(\tau \sum_{t'=\tau}^t \|z_{\bar{x}}(x, t')\|_{2, \omega_h^*}^2 \right)^{1/2} \right\} \equiv \delta(t), \quad t \in \omega_\tau, \end{aligned}$$

burada $c_3 = \max(\sqrt{T}; 1)$.

Bu bərabərsizlikdən nəticə kimi aşağıdakı üç bərabərsizlik alınır:

$$\gamma^2(t) \leq \delta(t), \quad t \in \omega_\tau, \quad \tau \sum_{t'=\tau}^t \|z_{\bar{x}}(x, t')\|_{2, \omega_h^*}^2 \leq \nu^{-1} \delta(t), \quad t \in \omega_\tau, \quad \tau \sum_{t'=\tau}^t \tau \|z_{\bar{t}}(x, t')\|_{2, \omega_h^*}^2 \leq \delta(t), \quad t \in \omega_\tau.$$

Bu bərabərsizliklərin hər iki tərəfindən kvadrat kök alsaq, alınan bərabərsizlikləri toplasaq və teorem 1-dəki mülahizələrdən istifadə edərək (34) qiymətləndirməsini alırıq. Teorem 2 isbat olundu.

(34) qiymətləndirməsinin sağ tərəfindəki hədlərin qiymətləndirmələri üçün aşağıdakı lemmanın hökmü doğrudur.

Lemma 1. Tutaq ki, (6) şərtləri ödənilir və (2)-(4) məsələsinin ümumiləşmiş həlli $w_{2,0}^{2,1}(\mathcal{Q}_T)$ sinfinə daxildir. Onda (29)-(33) kəmiyyətləri üçün aşağıdakı qiymətləndirmələr doğrudur:

$$\|\eta^{(1)}\|_{2, \omega_\tau^*} \leq \sqrt{2}(h + \tau) \|k\|_{\infty, \mathcal{Q}_T}^{(0,1)} \sqrt{\left\| \frac{\partial u}{\partial \xi} \right\|_{2, \mathcal{Q}_T} + \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \right\|_{2, \mathcal{Q}_T}}, \quad (37)$$

$$\|\eta^{(2)}\|_{2, \omega_\tau^*} \leq \sqrt{2} \|a\|_{\infty, \mathcal{Q}_T} \left[3h \left\| \frac{\partial u}{\partial \xi} \right\|_{2, \mathcal{Q}_T} + \tau \left\| \frac{\partial u}{\partial \theta} \right\|_{2, \mathcal{Q}_T} \right], \quad (38)$$

$$\left(\sum_{\omega_\tau^*} \|\eta^{(3)}\|_{2, \omega_h^*}^2 \right)^{1/2} \leq M \left(\frac{h^{3/2}}{\tau^{1/2}} + \tau^{1/2} \right) \|u\|_{2, \mathcal{Q}_T}^{(2,1)}, \quad (39)$$

$$\|\eta^{(4)}\|_{2, \omega_\tau^*} \leq \|v_h(x) - S^x[v(x)]\|_{2, \omega_h^*} \|g\|_{2, (0,T)}, \quad (40)$$

$$\|\eta^{(5)}\|_{2, \omega_\tau^*} \leq \sqrt{2} l \mu_1 \left[h^{3/2} \left\| \frac{\partial u}{\partial \xi} \right\|_{2, \mathcal{Q}_T} + h^{1/2} \tau \|u\|_{2, \mathcal{Q}_T} \right]. \quad (41)$$

İsbati. (37)-(41) qiymətləndirmələrinin isbatı texniki cəhətdən mürəkkəb və böyük həcmli olduğundan yalnız (38) bərabərsizliyini isbat etməklə kifayətlənək.

(30) bərabərliyi ilə təyin olunan $\eta^{(2)}(x, t)$ funksiyasını aşağıdakı şəkildə göstərə bilirik:

$$\eta^{(2)}(x, t) = \frac{1}{\mathcal{H}} \int_{e_2(t)} \int_{e_1(x)} a(\xi, \theta) \times \\ \times \left\{ \int_x^{\xi} \frac{\partial u(\xi_1, \theta)}{\partial \xi_1} d\xi_1 + \frac{1}{\tau} \int_{t-\tau}^t \left[\int_{\xi}^x \frac{\partial u(\xi_2, \theta)}{\partial \xi_2} d\xi_2 + \int_{\theta_1}^{\theta} \frac{\partial u(\xi, \theta_2)}{\partial \theta_2} d\theta_2 + \int_x^{\xi} \frac{\partial u(\xi_3, \theta)}{\partial \xi_3} d\xi_3 \right] d\theta_1 \right\} d\xi d\theta, (x, t) \in \omega_T^+.$$

Bu ifadəni istifadə edərək aşağıdakı bərabərsizliyi alırıq:

$$|\eta^{(2)}(x, t)| \leq \|a\|_{\infty, \omega_T} \int_{e_2(t)} \int_{e_1(x)} \left[\frac{3}{h} \left| \frac{\partial u(\xi, \theta)}{\partial \xi} \right| + \frac{1}{h} \left| \frac{\partial u(\xi, \theta)}{\partial \theta} \right| \right] d\xi d\theta, (x, t) \in \omega_T^+.$$

Bu bərabərsizlikdən (38) qiymətləndirməsi alınır.

Teorem 2 və lemma 1-dən (25)-(27) məsələsinin xəta qiymətləndirməsi üçün aşağıdakı teoremin hökmünün doğruluğu alınır.

Teorem 3. Tutaq ki, teorem 2-nin şərtləri ödənilir və $v \in V$ və $v_h \in V_h$ ixtiyari idarəedicilərdir. Onda (10)-(12) məsələsinin xəta qiymətləndirməsi üçün aşağıdakı bərabərsizlik doğrudur:

$$\|y(x, t; v_h) - \bar{u}(x, t; v)\|_{V_2^{1,0}(\omega_T^+)} + \sqrt{\tau} \|y_t(x, t; v_h) - \bar{u}_t(x, t; v)\|_{L_2(\omega_T^+)} \leq \\ \leq M \left[h + \frac{h^{3/2}}{\tau^{1/2}} + \tau^{1/2} + \|v_h(x) - S^x v\|_{L_2(\omega_h^+)} \right] = ME(h, \tau, v, v_h),$$

$$\text{burada } E(h, \tau, v, v_h) = h + \frac{h^{3/2}}{\tau^{1/2}} + \tau^{1/2} + \|v_h(x) - S^x v\|_{L_2(\omega_h^+)}. \quad (42)$$

Nəticə 1. Tutaq ki, $v_h(x) = S^x v(x)$, $x \in \omega_h^+$. Onda (10)-(12) fərq sxeminin həlli (2)-(4) məsələsinin həllinə $V_2^{1,0}(\omega_T^+)$ fəzasının şəbəkə normasında $\tau \sim h^{3/2}$ olduqda $O(h^{3/4})$, $\tau \sim h$ və ya $\tau \sim h^2$ olduqda $O(h^{1/2})$, $\tau \sim h^2$ və ya $\tau \sim h^{7/4}$ olduqda $O(h^{5/8})$ sürəti ilə yığılır.

4. Aproximasiyaların funksionala görə xəta qiymətləndirməsi və yığılma sürəti

Teorem 4. Tutaq ki, teorem 2-nin şərtləri ödənilir. Onda ixtiyari $v \in V$ və $v_h \in V_h$ idarəediciləri üçün (9) şəbəkə funksionalının xətası üçün aşağıdakı qiymətləndirmə doğrudur:

$$|J(v) - J_{h\tau}(v_h)| \leq M[h + \tau + E(h, \tau, v, v_h)]. \quad (43)$$

Bu teoremin isbatı (1), (9) bərabərliklərindən və (42) qiymət-

ləndirməsindən istifadə etməklə aparılır.

Aşağıdakı qaydalarla təyin olunan iki $Q_h : L_2(0, l) \rightarrow L_2(\omega_h^+)$ və $P_h : L_2(\omega_h^+) \rightarrow L_2(0, l)$ inikaslarını daxil edək:

$$Q_h v(x) = S^x v(x), x \in \omega_h^+, \quad (44)$$

$$P_h v_h(\xi) = v_h(x), \xi \in e_1(x), x \in \omega_h^+, P_h v_h(\xi) = 0, \xi \in e_1(0). \quad (45)$$

Asanlıqla yoxlamaq olar ki, ixtiyari $v(\xi) \in L_2(0, l)$ və $v_h(x) \in L_2(\omega_h^+)$ idarəediciləri üçün

$$\|Q_h v(x)\|_{2, \omega_h^+} \leq \|v(\xi)\|_{2, (0, l)}, \|P_h v_h(\xi)\|_{2, (0, l)} = \|v_h(x)\|_{2, \omega_h^+}.$$

Buradan alınır ki, ixtiyari $v(\xi) \in V$, $v_h(x) \in V_h$ üçün $Q_h v(x) \in V_h$, $P_h v_h(\xi) \in V$.

Lemma 2. Tutaq ki, teorem 2-nin şərtləri ödənilir. Onda ixtiyari $v \in V$, $v_h \in V_h$ idarəediciləri üçün aşağıdakı qiymətləndirmələr doğrudur:

$$|J(v) - J_{h\tau}(Q_h v)| \leq M \left[h + \tau^{1/2} + \frac{h^{3/2}}{\tau^{1/2}} \right], \quad (46)$$

$$|J(P_h v_h) - J_{h\tau}(v_h)| \leq M \left[h + \tau^{1/2} + \frac{h^{3/2}}{\tau^{1/2}} \right]. \quad (47)$$

(46) və (47) qiymətləndirmələrinin doğruluğu (49), (50) bərabərliklərini nəzərə almaqla (43) bərabərsizliyindən birbaşa alınır.

Teorem 5. Tutaq ki, teorem 2-nin şərtləri ödənilir. Onda

$$|J_{h\tau^*} - J_*| \leq M \left[h + \tau^{1/2} + \frac{h^{3/2}}{\tau^{1/2}} \right] \quad (48)$$

qiymətləndirməsi doğrudur.

İsbatı. Hər hansı $v_* \in V_*$ idarəedicisini götürək. Onda aşkardır ki, $Q_h v_* \in V_h$. Buradan və (46)-dan alırıq ki,

$$J_{h\tau^*} \leq J_{h\tau}(Q_h v_*) \leq J(v_*) + M \left[h + \tau^{1/2} + h^{3/2} \tau^{-1/2} \right] = J_* + M \left[h + \tau^{1/2} + h^{3/2} \tau^{-1/2} \right]. \quad (49)$$

Hər hansı $v_{h^*} \in V_{h^*}$ idarəedicisini götürək. Aşkardır ki, $P_h v_{h^*} \in V_h$. Buradan və (47)-dən alırıq ki,

$$J_* \leq J(P_h v_{h^*}) \leq J_{h\tau}(v_{h^*}) + M \left[h + \tau^{1/2} + h^{3/2} \tau^{-1/2} \right] = J_{h\tau^*} + M \left[h + \tau^{1/2} + h^{3/2} \tau^{-1/2} \right]. \quad (50)$$

Teorem 5 isbat olundu.

Nəticə 2. (48) bərabərsizliyindən istifadə edərək (10)-(13) məsələlərinin funksionala görə müxtəlif yığılma sürətləri alına bilər. Məsələn, $\tau \sim h^{3/2}$ olduqda $|J_{h\tau^*} - J_*| \leq Mh^{3/4}$ qiymətləndirməsi, $\tau \sim h$ və ya $\tau \sim h^2$ olduqda $|J_{h\tau^*} - J_*| \leq Mh^{1/2}$ qiymətləndirməsi və $\tau \sim h^{5/4}$ və ya $\tau \sim h^{7/4}$ olduqda $|J_{h\tau^*} - J_*| \leq Mh^{5/8}$ qiymətləndirməsi doğrudur.

Aproksimasiyaların requlyarlaşdırma prosesini apararaq və alınmış

nəticələrdən istifadə edərək güclü yığılan minimallaşdırıcı ardıcılığın qurulma qaydasını göstərmək olar [11, s. 325].

ƏDƏBİYYAT

1. Искендеров А.Д. О вариационных постановках многомерных обратных задач математической физики // ДАН СССР, - 1984, - т. 274, - №3, - с. 531-533.
2. Алифанов О.А., Артюхин Е.А., Румянцев С. В. Экстремальные методы решения некорректных задач. - Москва: Наука, - 1988, - 285 с.
3. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. - Новосибирск: Сибирское Научное Издательство, - 2009, - 457 с.
4. Тагиев Р.К., Габиров В.М. Разностная аппроксимация и регуляризация задачи оптимального управления для параболического уравнения с интегральным условием // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. - 2017, - №50, - с.30-44.
5. Тагиев Р.К., Габиров В.М. Сходимость разностных аппроксимаций и регуляризация задачи оптимального управления для уравнения теплопроводности с интегральным граничным условием // Вестник Бакинского Университета. Сер. физ.-матем. наук. - 2017, - №2, - с.27-43.
6. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. - Москва: Наука, - 1973, - 408 с.
7. Тагиев Р.К., Магеррамли Ш.И. О разрешимости начально-краевой задачи для одномерного линейного параболического уравнения с интегральным граничным условием // Вестник Бакинского Университета. Серия: Физико-математических наук, - 2019, - №2, - с. 17-26.
8. Tagiyev R.K., Maharramli Sh.I. Variational method of solving inverse problem for a parabolic equation with integral conditions // The 6th International Conference on Control and Optimization with Industrial Applications. 11-13 July, - 2018, - pp. 286-288.
9. Самарский А.А., Андреев В.Б. Разностные методы для эллиптических уравнений. -Москва: Наука, - 1976, - 325 с.
10. Лубышев Ф. В. Разностные аппроксимации и регуляризация задач оптимального управления для параболических уравнений с управлениями в коэффициентах // Журн. вычисл. матем. и матем. физ., - 1995, - т.35, - №9, - с.1313-1333.
11. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. - Москва, 1981, - 400 с.

**РАЗНОСТНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ И РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ОБРАТНОЙ
ЗАДАЧИ В ВАРИАЦИОННОЙ ФОРМЕ О НАХОЖДЕНИИ СВОБОДНОГО
ЧЛЕНА ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ
УСЛОВИЯМИ**

Ш.И.МАГЕРРАМЛИ

РЕЗЮМЕ

В данной работе рассматривается вариационная постановка обратной задачи об определении свободного члена параболического уравнения с интегральными условиями. Установлены оценки скорости сходимости разностных аппроксимаций задачи по состоянию и функционалу.

Ключевые слова: параболическое уравнение, интегральные условия, обратная задача, разностная аппроксимация

**DIFFERENCE APPROXIMATION AND REGULARIZATION
OF THE VARIATIONAL STATEMENT OF THE INVERSE PROBLEM
OF DETERMINING THE FREE TERM OF A PARABOLIC EQUATION
WITH INTEGRAL CONDITIONS**

Sh.I.MAHARRAMLI

SUMMARY

In this paper, we consider the variational statement of the inverse problem of determining the free term of a parabolic equation with integral conditions. We establish estimates for the rate of convergence of difference approximations of the problem with respect to the state and functional.

Keywords: parabolic equation, integral boundary condition, inverse problem, difference approximation

УДК 517.956

**О ЗАДАЧАХ ТИПА КОШИ И ГУРСА НА ЛИНИЯХ
С ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИМИ И
НЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИМИ КУСКАМИ ДЛЯ
ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА**

О.М.ГУСЕЙНОВ, Т.Д. МАМЕДОВ

Гянджинский Государственный Университет
Bsu.edu.az

В работе для весьма слабых ограничениях типа ограниченности и суммируемости на коэффициенты гиперболического уравнения третьего порядка одной задачи, типа Коши и Гурса доказано существование и единственность θ -фундаментального решения и найдено интегральное представление решения неоднородной задачи.

Ключевые слова: гиперболического уравнения третьего порядка, θ -фундаментальное решение, пространство $W_p^{(2,1)}(G)$, задачи Коши и Гурса.

В работе для весьма слабых ограничениях типа ограниченности и суммируемости на коэффициенты гиперболического уравнения третьего порядка одной задачи, введено понятие θ -фундаментального решения, которое естественным образом, обобщает понятие функции Римана на случай гиперболических уравнений третьего порядка с негладкими коэффициентами и позволяет найти интегральное представление решения неоднородной задачи. Кроме того, найдены достаточные условия, при которых эта задача везде корректно разрешима вместе со своей сопряженной системой и существует единственное θ -фундаментальное решение.

На прямоугольной области

$$G = G_1 \times G_2, G_1 = (x_0, x_1), G_2 = (y_0, y_1)$$

плоскости XOY рассмотрим непрерывную линию Γ , которая расположена на \bar{G} , соединяет точки (x_0, y_1) и (x_1, y_0) , и удовлетворяет условиям со всеми прямыми вида

$$x = \alpha = \text{const} \quad \text{и} \quad y = \beta = \text{const} (\alpha \in \bar{G}_1, \beta \in \bar{G}_2)$$

линия Γ имеет единственную точку пересечения, за возможным исключением конечного числа прямых

$$x = \alpha_k, k = 1, 2, \dots, N_1, \text{ и } y = \beta_k, k = 1, 2, \dots, N_2, (\alpha_k \in \bar{G}_1, \beta_k \in \bar{G}_2),$$

которыми Γ может пересекаться вдоль некоторых отрезков. Всякую такую линию назовем монотонной линией. Будем рассматривать монотонные линии, которые могут быть определены как объединение

$$\{(x, S_\Gamma(x)) \mid x \in \bar{G}_1\} \cup \{(v_\Gamma(y), y) \mid y \in \bar{G}_2\}$$

графиков некоторой пары монотонно невозрастающих функций $y = S_\Gamma(x)$ и $x = v_\Gamma(y)$ являющихся непрерывными на \bar{G}_1 и \bar{G}_2 , за возможным исключением конечного числа точек

$$x = \alpha_k \in \bar{G}_2, k = 1, 2, \dots, N_1 \text{ и } y = \beta_k \in \bar{G}_2, k = 1, 2, \dots, N_2,$$

в из которых они могут иметь разрывы первого рода (в точках разрыва их значения считаются равными одному из пределов в этой точке справа или слева). При этом функцию $x = v_\Gamma(y)$ можно рассматривать как обобщенную обратную для функции $y = S_\Gamma(x)$ и обратно.

Такие монотонные линии, в частности, могут быть составлены как объединения конечного числа кусков прямых линии, параллельных координатным осям.

Пусть $W_p^{(2,1)}(G), 1 \leq p \leq \infty$ – пространство всех $u \in L_p(G)$ имеющих в смысле С.Л.Соболева обобщенные производные

$$D_x^i D_y^j u \in L_p(G), i = 0, 1, 2; j = 0, 1,$$

где $D_z = \frac{\partial}{\partial z}$. Пространство $W_p^{(2,1)}(G)$ банахово в норме

$$\|u\|_{W_p^{(2,1)}(G)} = \sum_{\substack{0 \leq i \leq 2 \\ 0 \leq j \leq 1}} \|D_x^i D_y^j u\|_{L_p(G)}$$

Рассмотрим уравнение

$$\begin{aligned} (Lu)(x, y) = & D_x^2 D_y u(x, y) + a_{2,0}(x, y) D_x^2 u(x, y) + \\ & + a_{1,1}(x, y) D_x D_y u(x, y) + a_{1,0}(x, y) D_x u(x, y) + \\ & + a_{0,1}(x, y) D_y u(x, y) + a_{0,0}(x, y) u(x, y) = \varphi^0(x, y), (x, y) \in G, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\varphi^0 \in L_p(G)$

Пусть $a_{i,j}(x, y) (i = 0, 1, 2; j = 0, 1)$ измеримы на G и

$$a_{i,0} \in L_\infty(G), a_{2,0}, a_{1,1} \in L_\infty(G), (i = 0, 1)$$

При наложенных условиях оператор L уравнения (1) действует из $W_p^{(2,1)}(G)$ в $L_p(G)$ и ограничен. Зададим для уравнения (1) на некоторой монотонной линии Γ условия

$$\begin{aligned}
(L_{2,0}u)(x) &\equiv D_x^2 u(x, y) \Big|_{y=S_T(x)} = \varphi_{2,0}(x), \quad x \in G_1 \\
(L_{1,1}u)(y) &\equiv D_x D_y u(x, y) \Big|_{x=\nu_T(y)} = \varphi_{1,1}(y), \quad y \in G_2 \\
(L_{0,1}u)(y) &\equiv D_y u(x, y) \Big|_{x=\nu_T(y)} = \varphi_{0,1}(y) \\
L_{1,0}u &\equiv D_x u(x, y) \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_1}} = \varphi_{1,0}, \quad L_{0,0}u \equiv u(x, y) \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_1}} = \varphi_{0,0};
\end{aligned} \tag{2}$$

где $\varphi_{2,0} \in L_p(G_1)$, $\varphi_{0,1} \in L_p(G_2)$, $\varphi_{i,0} \in R$, ($i=0,1$) заданные элементы.

Операции $L_{2,0}, L_{1,1}, L_{i,0}$ взятия следов непрерывны из $W_p^{(2,1)}(G_1)$ в $L_p(G_1), L_p(G_2), R$, соответственно. Поэтому оператор $\hat{L} = (L, L_{2,0}, L_{1,1}, L_{0,1}, L_{1,0}, L_{0,0})$ задачи (1), (2) действует из

$$W_p^{(2,1)}(G) \in E_p^{(2,1)} = L_p(G) \times L_p(G_1) \times L_p(G_2) \times L_p(G_2) \times R \times R$$

и ограничен.

Задачу (1), (2) можно написать также в виде эквивалентного операторного уравнения

$$\hat{L}u = \hat{\varphi} \tag{3}$$

где

$$\hat{\varphi} = (\varphi, \varphi_{2,0}, \varphi_{1,1}, \varphi_{0,1}, \varphi_{1,0}, \varphi_{0,0}) \in E_p^{(2,1)}$$

Решением задачи (1), (2) будем называть функцию $u \in W_p^{(2,1)}(G)$ для которой выполняются равенство (1) почти всюду на G , первое, второе и третье равенства из (2) почти всюду на G_1 и G_2 , а также четвертое и пятое равенство из (2), в обычном смысле.

Задачу (1), (2) назовем задачей Коши и Гурса. Если $\Gamma = \{(x, \nu(x)) \mid x \in \bar{G}_1\}$ то задача (1), (2) эквивалентна задаче Коши классического вида, где $\nu(x)$ - непрерывно-дифференцируемая функция на \bar{G}_1 $\nu'(x) < 0$, $\nu(x_0) = y_1$, $\nu(x_1) = y_0$ (в этом случае линия Γ является не характеристической).

Если

$$\Gamma = \{(x, y) \mid y = S_T(x) = y_0, x \in [x_0, x_1]\} \cup \{(x, y) \mid x = \nu_T(y) = x_0, y \in [y_0, y_1]\}$$

или

$$\Gamma = \{(x, y) \mid y = S_T(x) = y_1, x \in [x_0, x_1]\} \cup \{(x, y) \mid x = \nu_T(y) = x_1, y \in [y_0, y_1]\}$$

то задача (1), (2) эквивалентна задаче Гурса классического вида (в этом случае Γ является характеристической линией) В этом смысле, задача (1), (2) включает в себя как частный случай задачи Коши и Гурса.

Если задача (1), (2) для любого $\varphi \in E_p^{(2,1)}$ имеет единственное решение $u \in W_p^{(2,1)}(G)$ и при этом

$$\|u\|_{W_p^{(2,1)}(G)} \leq M \|\hat{\varphi}\|_{E_p^{(2,1)}},$$

где

$$\|\hat{\varphi}\| = \|\varphi\|_{L_q(G)} + \|\varphi_{2,0}\|_{L_q(G_1)} + \|\varphi_{1,1}\|_{L_q(G_2)} + \|\varphi_{0,1}\|_{L_q(G_2)} + |\varphi_{i,0}| + |\varphi_{0,0}|$$

M - положительное постоянное не зависящее от φ , то будем говорить, что задача (1), (2) везде корректно разрешима. Отметим, что везде корректная разрешимость задачи (1), (2) эквивалентная тому, что ее оператор L имеет ограниченный обратный L^{-1} определенный на $E_p^{(2,1)}$.

Для оператора \hat{L} задачи (1), (2) найден явный вид сопряженного оператора \hat{L}^* . Возьмем некоторый функционал $\hat{f} \in E_p^{(2,1)}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ограниченный на $E_p^{(2,1)}$.

Тогда \hat{f} имеет вид

$$\hat{f} = (f(x, y), f_{2,0}(x), f_{1,1}(y), f_{0,1}(y), f_{1,0}, f_{0,0})$$

где

$$f \in L_q(G), f_{2,0} \in L_q(G_1), f_{1,1} \in L_q(G_2), f_{0,1} \in L_q(G_2), f_{1,0} \in R, f_{0,0} \in R$$

и по определению имеет место

$$\begin{aligned} \hat{f}(\hat{L}u) = & \iint_G (Lu)(x, y) f(x, y) dx dy + \int_{G_1} D_x^2 u(x, S_r(x)) f_{2,1}(x) dx + \\ & + \int_{G_2} D_x D_y u(v_r(y), y) f_{1,1}(y) dy + \int_{G_2} D_y u(v_r(y), y) f_{0,1}(y) dy + \\ & + D_x u(x_0, y_1) f_{1,0} + u(x_0, y_1) f_{0,0} \end{aligned} \quad (4)$$

Учитывая здесь выражение оператора L из (1) приведем правую часть равенство (4) к виду

$$\begin{aligned} \hat{f}(\hat{L}u) = & \iint_G (V\hat{f}) D_x^2 D_y u(x, y) dx dy + \int_{G_1} (V_{2,0}\hat{f}) D_x^2 u(x, y_1) dy_1 + \\ & + \int_{G_2} (V_{1,1}\hat{f})(x_1, y) D_x D_y u(x_1, y) dy + \int_{G_2} (V_{0,1}\hat{f}) D_y u(x_1, y) dy + \\ & + (V_{1,0}\hat{f}) D_x u(x_1, y_1) + (V_{0,0}\hat{f}) u(x_1, y_1) \end{aligned}$$

В работе доказана следующая

Теорема. Задача (1), (2) имеет единственно θ фундаментальным решение $E_p^{(2,1)}(G)$.

$$\begin{aligned} \hat{f}(x, y) = & (f(\tau, \xi; x, y), f_{2,0}(\tau; x, y), \\ & f_{1,1}(\xi; x, y), f_{0,1}(\xi; x, y), f_{1,0}(x, y), f_{0,0}(x, y)) \end{aligned}$$

из E_q и при этом решение $u \in W_p^{(1,1)}(G)$ задачи (1), (2) представляется в виде

$$\begin{aligned} u(x, y) = & \iint_G f(\tau, \xi; x, y) \varphi(\tau, \xi) d\tau d\xi + \\ & + \int_{G_1} f_{2,0}(\tau; x, y) \varphi_{2,0}(\tau) d\tau + \int_{G_1} f_{1,1}(\xi; x, y) \varphi_{1,1}(\xi) d\xi + \\ & + \int_{G_2} f_{0,1}(\xi; x, y) \varphi_{0,1}(x, y) d\xi + f_{1,0}(x, y) \varphi_{1,0} + f_{0,0}(x, y) \varphi_{0,0} \end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахиев С.С. ДАН СССР, - 1980, - т.251, - №5, - с.1037-1040
2. Ахиев С.С., Гусейнов О.М. Вестник Бакинского Университета. Изд. Бак.Универс., - 1992, - №1, - с.152-155
3. Huseynov O., İsmayılov N., Mamedov R., Kubıshev İ., Gasımova A. THERMAN 2015 and 4nd Rostocker İnternfsional symposium. 2015. - Baku, Azerbaijan. - Pp. 77-78

ÜÇÜNCÜ TƏRTİB HİPERBOLİK TİP TƏNLİKLƏR ÜÇÜN XARAKTERİSTİK VƏ XARAKTERİSTİK OLMAYAN XƏTT HİSSƏLƏRİ ÜZƏRİNDƏ KOŞI VƏ QURSA TIPLI MƏSƏLƏLƏR

O.M.HÜSEYNOV, T.C.MƏMMƏDOV

XÜLASƏ

Məqalədə ölçülən məhdud əmsallara malik üçüncü tərtib hiperbolik tənliklər üçün Koşi və Qursa tipli məsələlər üçün θ - fundamental həllin varlığı və yeganəliyi isbat edilmiş və onun köməyi ilə həllin inteqral təsviri tapılmışdır.

Acar sözlər: Üçüncü tərtib hiperbolik tip tənliklər, θ - fundamental həll, $W_p^{(2,1)}(G)$ fəzaları, Koşi və Qursa tipli məsələlər.

FUNDAMENTAL SOLUTION OF COUCHY AND GURSA PROBLEMS FOR THE HIPERBOLIC EQUATIONS OF THE THIRD ORDER

O.M.HUSEYNOV, T.C.MAMMADOV

SUMMARY

In the paper it is proved existence and uniqueness of the θ - fundamental solution of Cauchy and Gursa problems with measurable and bounded coefficients for one type of hyperbolic equation of third order and found an integral representation of the solution for the considered equation, by using of them.

Key words: hyperbolic equation of third order, θ -fundamental solution, $W_p^{(2,1)}(G)$ spaces, Cauchy and Gursa problems

İNFORMATİKA**UOT 004.338.36****ORKİD NO: 0000-0003-3084-9091****PROQNOZLAŞDIRMA METODLARININ DƏQİQLİYİ,
MODELLƏRİN ADEKVATLIĞINI EKONOMETRİK ÜSULLARLA
QIYMƏTLƏNDİRMƏ METODİKALARI****G.Ə.RƏHİMOVA*****Bakı Dövlət Universiteti******gularaisayeva@mail.ru***

Ümumi halda proqnoz dedikdə, obyektin gələcəkdə mümkün vəziyyəti, onun həyata keçirilməsində alternativ yollar və müddətlər haqqında elmi cəhətdən əsaslandırılmış mülahizə nəzərdə tutulur. Proqnoz - gələcəkdə baş verəcək hadisə və ya prosesin elmi modelidir. Proqnoz - model əsasında, verilmiş amillərə nəzərən, qeyri-məlum iqtisadi göstəricilərin hesablanmasıdır. Modelləşdirmə - təbii (şüurlu və ya əksinə) proqnozlaşdırma alətidir. Proqnozlaşdırma proqnozun hazırlanması prosesidir; dar mənada – hər hansı bir prosesin konkret perspektiv inkişafının xüsusi elmi tədqiqidir. Proqnozlarda zəruri əsas şərt – ilkin verilənlərin çatışmazlığı problemdir. Gələcəyin öncədən söylənməsi üçün verilənlər həmişə çatmır. Verilənlər nə qədər çatmırsa, onları bərpa etmək və proqnoz vermək bir o qədər çətinləşir. Proqnozun dəqiqliyinin qiymətləndirilməsi – yüksək səviyyəli proqnozlaşdırma prosedurunun ayrılmaz hissəsidir. Bu məqsədlə, adətən, asılılıqların qurulması üçün ehtimal-statistik modellərdən istifadə olunur, məsələn, ən yaxşı proqnozu maksimum həqiqətə uyğun üsuldən istifadə etməklə qururlar. Proqnozların dəqiqliyi və onun etibarlı sərhəddinin tapılması üçün parametrik (adətən, normal səhvlər (meyllər) modeli əsasında) və qeyri-parametrik qiymətləndirmələr işlənmişdir (Ehtimal nəzəriyyəsinin Mərkəzi Limit Teoreminin əsasında).

Açar sözlər: ekonometrik metodlar, ekonometrik modelləşdirmə, proqnozlaşdırma, risk, proqnoz səhvləri (meyllər).

Məsələnin qoyuluşu. Proqnozlaşdırmanın öncədən söyləməkdən fərqi çox sadədir. Proqnoz elmi nəticələrin xüsusiyyətlərinə malikdir: onu əsaslandırmaq və müəllifsiz təkrar etmək olar və lazımdır. Öncədən söyləmək isə inanc kimi qəbul edilir. Məhz proqnozlaşdırma ilə öncədən söyləmək arasında ekspert qiymətləndirmə durur. Ekspert qiymətləndirmə, verilmiş konkret sahədə, mütəxəssisin proqnozlaşdırılan prosesin mümkün inkişafı

haqqında arqumentli təsəvvürünə əsaslanır. Adətən, belə proqnoz ölçülməsi və formal təsviri çətin olan az və ya çox mənada aşkar olan və ya ekspertin izahından sonra aşkar olan bir çox amilləri nəzərə alır. Adətən, proqnozlaşdırmanın qarşısında iki məsələ durur: real hadisənin analizi və sintezi. Analiz prosesin səbəb – nəticə strukturunun araşdırılmasına kömək edir, sintezin mümkün variantlarından biri isə növbəti anda və ya növbəti dövrdə prosesin parametrlərini proqnozlaşdırmaqdan ibarətdir.

Qoyulmuş məsələnin mahiyyətini başa düşmək üçün öncədən bəzi anlayışların, xüsusi halda metod, metodika, metodologiya anlayışlarının tərifini bilmək lazımdır.

Sözün geniş mənasında - *metod* (yunanca *methodos*) :

- 1) Təbiət və ictimai hadisələrin tədqiqi;
- 2) Müəyyən fəaliyyət (yaradıcılıq) sahəsində üsul (vasitə) və ya üsullar sistemidir;

İqtisadiyyat elmi və praktikasında *metod* - bu :

1) Təbiət, cəmiyyət və təfəkkürün qanunauyğunluqları və hadisələrin öyrənilməsində yanaşmaların qanun və üsullar sistemidir.

2) Elm və praktikada müəyyən nəticələrə nail olmaq üçün üsul, vasitə, yoldur;

3) Obyektiv həqiqətlərdən və tədqiq olunan predmet, hadisə və proseslərdən doğan biliklərin nəzəri tədqiqat və ya praktiki həyata keçirilməsidir.

Metodika – bu:

- 1) Nəyinsə praktiki icrası üçün metodlar və üsullar toplusu;
- 2) Bu və ya digər elmin tədrisi metodları haqqında elmdir.

Bu anlayışları proqnozlaşdırmaya aid etsək nümunə üçün (1-ci yanaşma) aşağıdakıları göstərmək olar: Satış və tələbin proqnozlaşdırma metodikası, müəssisənin maliyyə vəziyyətini proqnozlaşdırma metodikası və s..

Metodologiya- bu:

1) Metod haqqında elmdir;

2) Hər hansı bir elmdə tətbiq olunan tədqiqat üsullarının əsas prinsipləri və ya üsulları toplusudur.

Vahid, universal proqnozlaşdırma metodu mövcud deyil. Proqnozlaşdırılan çoxsaylı situasiyaların müxtəlifliyi ilə əlaqədar olaraq çoxsaylı müxtəlif proqnozlaşdırma metodları mövcuddur (150-dən yuxarı). Şəkil 1-də induktiv və deduktiv yanaşmalara əsaslanan proqnozlaşdırma metodlarının mümkün variantlarından birinin təsnifatı verilib. Şəkildən görüldüyü kimi bütün proqnozlaşdırma metodları toplusu onların həmcinslik dərəcəsi asılı olaraq iki qrup şəklində təqdim oluna bilər:

- 1) sadə metodlar;
- 2) kompleks metodlar [2].

Sadə metodlar qrupu məzmununa və istifadə olunan instrumentariyə görə həmcins proqnozlaşdırma metodlarını özündə birləşdirir. (Məsələn, tendensiyaların ekstrepolyasiyası, morfoloji analiz və s.). Kompleks metodlar – çox zaman xüsusi proqnostik sistemlərlə realizə olunan (məsələn, proqnoz grafi metodu, “Pattern” sistemi və s.) metodlar kombinasiyasıdır.

Bundan başqa bütün proqnozlaşdırma metodları üç sinfə bölünür:

- 1) faktoqrafik metodlar;
- 2) ekspert metodlar (Delfi metodu);
- 3) kombinə olunmuş metodlar.

Proqnozların dəqiqliyi.

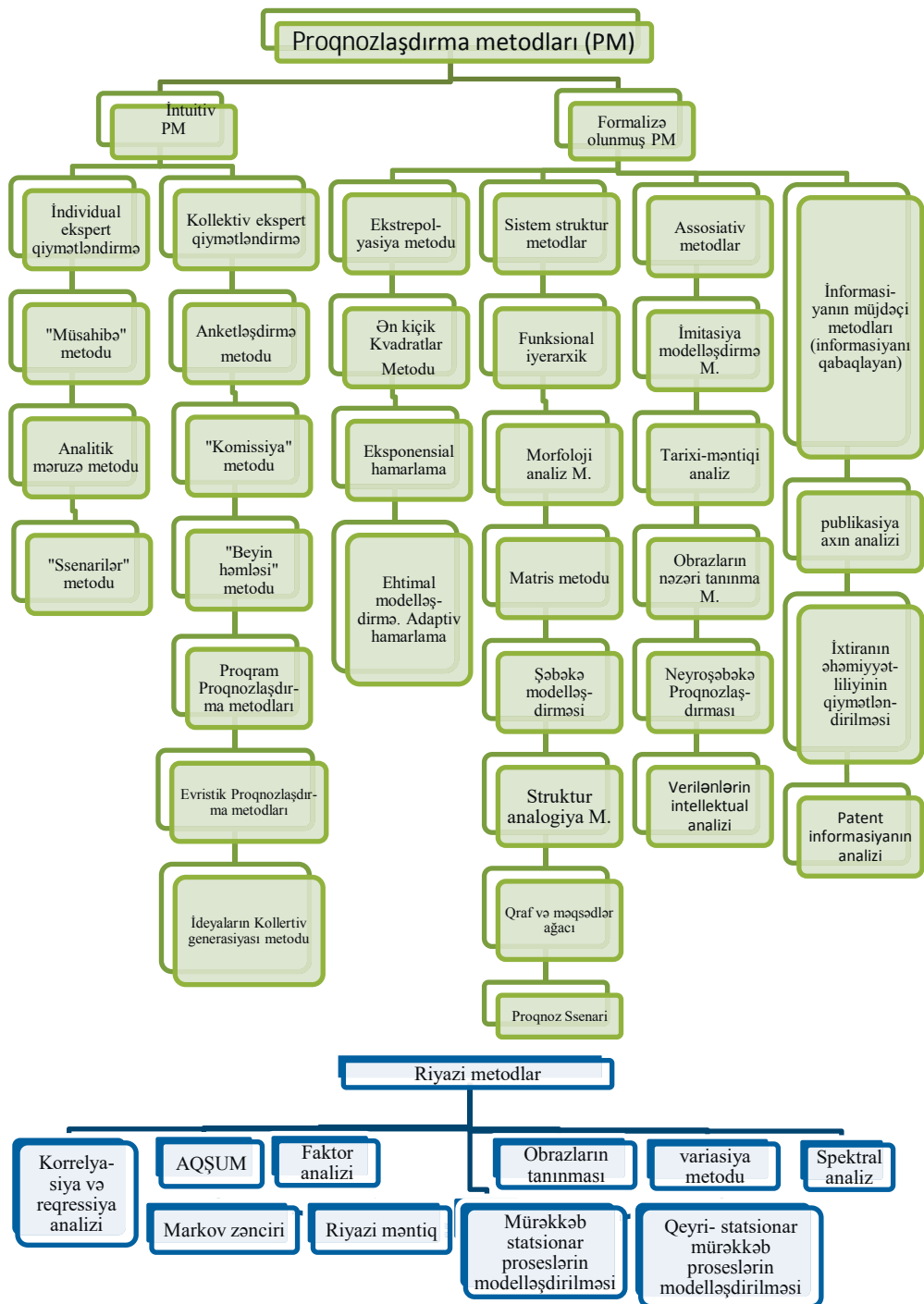
Modelin effektivliyi qiymətləndirilərkən proqnozlaşdırmada istifadə olunan əsas kriteriyalar proqnozun dəqiqliyi və müəssisənin gələcək maliyyə vəziyyəti haqqında tam təsəvvür yaratmaqdır. Tədqiqatlar göstərir ki, proqnozun tamlığı (bütünlüyü) nöqtəyi-nəzərdən, proqnoz formalı hesablar tərtib etməyə imkan verən metodlar, şərtsiz ki, ən yaxşı metodlar hesab olunur. Bu halda, müəssisənin gələcək vəziyyətinin indiki vəziyyətindən heç də geri qalmayan təfsilatlı analizini vermək mümkündür. Proqnozun dəqiqliyi məsələsi daha mürəkkəbdir və xüsusi diqqət tələb edir. *Dəqiqlik və ya proqnozun səhvi* faktiki və proqnoz qiymətləri arasındakı fərqdır. Hər bir konkret modeldə bu kəmiyyət bir sıra faktorlardan asılıdır.

Proqnozlaşdırma modeli hazırlanarkən istifadə olunan “tarixi” verilənlər mühüm rol oynayır. İdeal şəkildə böyük zaman kəsiyini əhatə edən çoxsaylı verilənlərdən istifadə etmək arzu olunan haldır. Bundan başqa istifadə olunan verilənlər situasiya nöqtəyi-nəzərdən “səciyyəvi” olmalıdır [3].

Riyazi statistika aparatından istifadə edən stoxastik metodlar tarixi verilənlərə tamamilə konkret tələblər qoyur və bu tələblər icra olunmursa, proqnozun dəqiqliyinə zəmanət verilmir. Verilənlər dəqiq, müqayisə oluna bilən, qanunauyğunluğu düzgün təzahür etdirə bilmək üçün həmcins və dayanıqlı olmalıdır. Proqnozun dəqiqliyi bu və ya digər konkret halda proqnozlaşdırma metodunun düzgün seçilməsindən birmənalı asılıdır. Lakin bu o demək deyil ki, hər bir halda yalnız bir model tətbiq oluna bilər. Tamamilə mümkündür ki, bir sıra hallarda müxtəlif modellər nisbətən etibarlı nəticələr versin.

İxtiyari proqnozlaşdırma modelinin əsas elementi trend və ya zaman sırasının əsas dəyişmə tendensiyasını göstərən xətdir. Modellərin böyük əksəriyyətində fərz olunur ki, trend xəttidir, lakin belə fərziyyə heç də hər zaman qanunauyğun deyil və proqnozun dəqiqliyinə mənfi təsir göstərə bilər.

Proqnozun dəqiqliyinə eyni zamanda trenddən mövsüm dəyişmələrini ayırmaq üçün (toplama və ya vurma yolu ilə) istifadə olunan metod da təsir edir. Reqressiya metodlarından istifadə edərkən müxtəlif faktorlar arasındakı səbəb-nəticə rabitələrini düzgün seçmək və bu münasibətləri modelə daxil etmək mühüm əhəmiyyət kəsb edir.



Şək. 1. Proqnozlaşdırma metodlarının təsnifat sxemi (AQŞUM-argumentlərin qrup şəkilli uçuotu metodu)

Yadda saxlamaq lazımdır ki, hesabat sətirlərinin proqnoz səhvləri və nəticə göstəricilərinin (maliyyə əmsalları) müəyyən olunmasında ortaya çıxan səhvlər çox zaman üst-üstə düşür. Doğrudan da, tutaq ki, hər hansı F əmsalı aşağıdakı kimi təyin edilir:

$$F = \frac{x+y}{z} \quad (1)$$

harada ki, x , y , z – mühasibat və ya analitik balansın hər hansı sətirləridir. Sətirlərin mütləq proqnoz səhvləri uyğun olaraq dx , dy , dz təşkil edir. Onda, proqnozun mütləq F səhvi aşağıdakı ifadəyə bərabər olur:

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial x} \delta x + \frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial z} \delta z \quad . \quad (2)$$

Nisbi səhvi hesablamaq üçün (1) və (2) ifadələrinə əsasən aşağıdakı ifadəni alırıq:

$$\frac{\delta F}{F} = \frac{\delta x + \delta y}{x + y} + \frac{\delta z}{z} \quad (3)$$

Başqa sözlə, əgər, məsələn, hər bir x , y , z sətirlərinin proqnoz dəqiqliyi 10% təşkil edirsə, onda $x=y$ əvəzləməsi etməklə (3) düsturundan F -in dəqiq qiymətini müəyyən etmək olar:

$$\frac{\delta F}{F} = \frac{\delta x}{2x} + \frac{\delta y}{2y} + \frac{\delta z}{z} = 20 \%$$

Beləliklə, alınır ki, proqnoz hesabatlarına əsaslanan metodlarda maliyyə əmsallarının proqnozunun dəqiqliyi, hesabat sətirlərinin proqnoz qiymətlərini müəyyən edən dəqiqlikdən həmişə aşağıdır. Buna görə də, əgər analitik ifadə maliyyə əmsallarının müəyyən edilməsinin dəqiqliyinə müəyyən tələblər qoyarsa (bu belə də olmalıdır), onda hesabat sətirlərinin proqnozunun yüksək dəqiqliyini təlim edən metod seçilməlidir [4].

Real proqnozları tərtib etmək üçün modeldən istifadə etməkdən öncə dəqiq proqnozu təmin etmək üçün modelin obyektivliyini yoxlamaq lazımdır. Buna iki müxtəlif yolla nail olmaq mümkündür:

1. Modelin köməyiylə alınmış nəticələr müəyyən zaman intervalından sonra faktiki qiymətlərlə müqayisə olunur. Bu cür yanaşmanın çatışmazlığı ondan ibarətdir ki, modelin “qüsursuz” olduğunu yoxlamaq çox vaxt tələb edə bilər. Belə ki, əsl həqiqətdə modeli yalnız uzunmüddətli zaman kəsiyində yoxlamaq olar.

2. Model əldə olan tarixi verilənlərin seçilmiş toplusu üzərində qurulur. Qalan verilənləri bu modelin köməyiylə alınmış proqnoz göstəriciləri ilə müqayisə etmək üçün istifadə etmək olar. Bu cür yoxlama daha realdır, belə ki, o faktiki olaraq proqnozlaşdırılan situasiyanı modelləşdirir. Bu metodun çatışmayan cəhəti ondan ibarətdir ki, ən axırıncı və uyğun olaraq daha

əhəmiyyətli göstəricilər ilkin modelin formalaşdırılması prosesindən kənar qalır.

Modelin yoxlanması ilə bağlı yuxarıda söylədiyimiz mülahizələrdən aydın olur ki, gözlənilən səhvləri azaltmaq üçün artıq mövcud modeldə dəyişikliklər etmək zərurəti ortaya çıxır. Bu cür dəyişikliklər modelin real həyatda tətbiq edildiyi bütün dövr ərzində həyata keçirilir. Kəsilməz surətdə həyata keçirilən bu cür dəyişikliklər trend, mövsümi və dövrü meyllərə və həmçinin ixtiyari istifadə olunan səbəb-nəticə münasibətlərinə aiddir. Beləliklə, modelin tərtib olunması prosesi bir neçə mərhələni özündə birləşdirir: verilənlərin yığılması, ilkin modelin hazırlanması, yoxlama, dəqiqləşdirmə və yenidən, müəssisənin maliyyə vəziyyətinin proqnozlaşdırılmasının informasiya mənbəyi olan, modelin etibarlılığını təmin etmək üçün kəsilməz surətdə əlavə verilənlərin yığılması.

İxtiyari proqnozlaşdırma modeli tərtib olunarkən fərz olunur ki, gələcəkdə situasiya indikindən çox da fərqlənməyəcək. Başqa sözlə, hesab olunur ki, əhəmiyyət kəsb edən faktorların hamısı proqnozlaşdırma modelində nəzərə alınıb və yaxud da modelin istifadə olunduğu müddətdə dəyişməz qalır.

Lakin model – sonsuz sayda fəaliyyətdə olan faktorların məhdud bir hissəsini seçməklə real situasiyanın kobudlaşdırılmış formasıdır. Qurulmuş modelin dəqiqliyi və effektivliyi birbaşa düzgün və əsaslandırılmış faktorların seçimindən asılıdır. Yadda saxlamaq lazımdır ki, proqnozlaşdırma üçün istifadə olunan modellərdə şüurlu və ya qeyri-şüurlu surətdə modelə daxil edilməmiş faktorlar mövcud olur və bunlar müəssisənin maliyyə göstəricilərinin proqnozlaşdırılmasına təsir göstərir.

Modellərin adekvatlığının qiymətləndirilməsi metodikaları

Müxtəlif alternativ proqnozları müqayisə etmək üçün proqnozun keyfiyyətini qiymətləndirən kriteriyaların olması zəruridir. Bu məqsədlə aşağıdakı kriteriyalardan istifadə olunur:

1. Teyl tərəfindən təklif olunmuş, *öncədən söylənilən retrospektiv* P_i qiymətilə müşahidə olunan A_i qiymətlərinin üst-üstə düşməməsi əmsalı

$$L = \frac{\left[\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (P_i - A_i)^2} \right]}{\left[\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (P_i)^2} \right] + \left[\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (A_i)^2} \right]} \quad (4)$$

Bu əmsal asanlıqla hesablanır və qiymətləri $[0,1]$ parçasında dəyişir. Parçanın sərhəd nöqtələrində bu əmsalın aşağıdakı məzmunlu interpretasiyası var:

Əgər

$$L = \begin{cases} 0, & \text{ela keyfiyyətli proqnoz} \\ 1, & \text{pis keyfiyyətli proqnoz} \end{cases}$$

Bu əmsal həm statistik və eyni zamanda keyfiyyət proqnozlaşdırılmasında tətbiq oluna bilər [5].

Standart meyl. Tutaq ki,

$$e_t = y_t - \hat{y}_t$$

proqnoz səhvidir və $y_t \neq 0$, \hat{y}_t – proqnozdur. e_t səhvlərini eksponensial şəkildə hamarlamaqla səhvin orta mütləq meylini - MAD_t təyin edək:

$$MAD_t = \alpha |e_t| + (1 - \alpha)MAD_{t-1} \quad (5)$$

Göründüyü kimi MAD_t mənfi deyil, demək olar ki, paylanmaların böyük əksəriyyət sinfi üçün standart meylin qiyməti orta mütləq meyldən böyükdür və ona mütənasibdir.

Müxtəlif paylanmalar üçün mütənasiblik əmsalı 1,2 və 1,3 arasında dəyişir (normal paylanma üçün - $\sqrt{\pi/2}$). Başqa sözlə $\sigma_t \approx 1,25MAD_t$. Proqnozun keyfiyyətini qiymətləndirmək üçün aşağıdakı proseduralardan istifadə edirik:

1. Proqnozun e_t – səhvinə hesablayaq.
2. MAD_t –nin qiymətini (5) düsturuna görə hesablayaq. İqtisadi göstəricilərin proqnozu üçün $MAD_0 = 0,1S_0$ qiyməti qənaətbəxş (kafi) hesab edilir. Harada ki, S_0 –sıranın eksponensial orta qiymətidir.
3. Orta mütləq faiz xətası (səhvi) (Mean Absolute Percentage Error):

$$MAPE = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-1} \frac{|e_t|}{y_t} * 100\% \quad (6)$$

$MAPE$ - göstəricisi adətən, proqnozlaşdırılan müxtəlif növ obyektlərin proqnoz dəqiqliyini müqayisə etmək üçün istifadə olunur.

Yüksək dəqiqlikli proqnozlar üçün $MAPE < 10\%$, yaxşı proqnozlar üçün $-10\% < MAPE < 20\%$, kafi proqnozlar üçün - $MAPE > 50\%$ olmalıdır.

4. Orta faiz xətası (Mean Percentage Error - MPE) və orta səhv (Mean Error - ME). MPE -proqnozun nisbi sürüşmə dərəcəsini xarakterizə edir.

İdeal proqnoz sürüşən olmamalıdır (yəni proqnozlaşdırma zamanı gələcək faktiki qiymətlərin yüksəldilməsilə bağlı baş verən itkilər, sonradan qiymətlərin aşağı salınması ilə tarazlaşdırılırsa, bu proqnozun sürüşkənliyi adlanır və hər iki tədbir 0-a yaxınlaşmalıdır).

Qeyd edək ki, orta faiz xətası sıfır verilənlər üçün təyin olunmayıb və 5%-i aşmamalıdır [6].

$$MAPE = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-1} \frac{e_t}{y_t} * 100\% . \quad (7)$$

Mütləq sürüşməni orta səhv xarakterizə edir:

$$MPE = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-1} e_t \quad (8)$$

5. Orta kvadratik meyletmə (Mean Square Error -MSE) və kvadratlar cəmi (Sum Square Error -SSE) uyğun olaraq,

$$MSE = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-1} e_t^2 \quad (9)$$

$$SSE = \sum_{t=1}^{n-1} e_t^2 \quad (10)$$

kimi ifadə olunur.

Nəticə. 1. Optimal proqnozlaşdırma metodunun seçimi zamanı *MSE* və *SSE* göstəricilərindən mütləq istifadə olunmalıdır.

2. Proqnozlaşdırmaya aid proqram paketlərində məhz bu iki göstərici modelin optimal parametrlərinin seçilməsində əsas kriteriya kimi qəbul olunur.

ƏDƏBİYYAT

1. Тимофеев, В.С. Эконометрика: учебник для академического бакалавриата / В.С.Тимофеев, А.В.Фаддеенков, В.Ю.Щеколдин. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва: Юрайт, - 2018, — 328 с.
2. Афанасьев В.Н., Юзбашев М.М. Анализ временных рядов и прогнозирование: Учеб. пособие. — Москва: Финансы и статистика, - 2004, — 228 с. — ISBN 5-279-02419-8
3. Гармаш, А.Н. Экономико-математические методы и прикладные модели: учебник для бакалавриата и магистратуры / А.Н.Гармаш, И.В.Орлова, В.В.Федосеев; под ред. В.В.Федосеева. — 4-е изд., перераб. и доп. — Москва: Юрайт, - 2017, — 328 с.
4. Буравлёв А.И. Эконометрика: учебное пособие/ Буравлёв А.И. — Москва: БИ-НОМ. Лаборатория знаний, - 2012. — 168 с.
5. Бабешко, Л.О. Эконометрика и эконометрическое моделирование [Электронный ресурс]: учебник / Л.О.Бабешко, М.Г.Бич, И.В.Орлова; Финансовый ун-т при Правительстве Рос. Федерации. - Москва: Вузовский учебник: ИНФРА-М, - 2018, - 385 с.
6. Попов, А.М. Математика для экономистов. В 2 ч. Часть 1: учебник и практикум для СПО / А.М.Попов, В.Н.Сотников. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва: Юрайт, - 2019, — 271 с.

ТОЧНОСТЬ МЕТОДОВ ПРОГНАЗИРОВАНИЯ, МЕТОДИКА ОЦЕНКИ АДЕКВАТНОСТИ МОДЕЛЕЙ С ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

Г.А.РАГИМОВА

РЕЗЮМЕ

Прогноз - это вероятностное суждение о будущем состоянии объекта исследования. *Прогноз* - это научная модель будущего события, явлений и т.п.. *Прогноз* - это расчет неизвестного экономического показателя по заданным факторам на основании модели. *Прогнозирование* - это разработка прогноза; в узком значении - специальное научное исследование конкретных перспектив развития какого-либо процесса. Основное условие необходимости в прогнозах - это недостаток исходных данных. Для предсказания будущего данных всегда не хватает, однако и при решении задач в настоящем времени данных очень часто не хватает. Чем больше данных отсутствует, тем сложнее их восстанавливать и делать прогноз. По мере сокращения объемов недостающих данных прогнозы уточняются, при полноте исходных данных прогноз замещается обычным расчетом с некоторой погрешностью.

Оценивание точности прогноза - необходимая часть процедуры квалифицированного прогнозирования. При этом обычно используют вероятностно-статистические модели восстановления зависимости, например, строят наилучший прогноз по методу максимального правдоподобия. Разработаны параметрические (обычно на основе модели нормальных ошибок) и непараметрические оценки точности прогноза и доверительные границы для него (на основе Центральной Предельной Теоремы теории вероятностей).

В статье опубликовано точность методов прогнозирования и методика оценки адекватности моделей с эконометрическим методом.

Ключевые слова: эконометрические методы, эконометрическое моделирование, прогнозирование, риск, ошибки прогнозирования (тренды).

ACCURACY OF METHODS OF FORECASTING, TECHNIQUE OF THE ASSESSMENT OF ADEQUACY OF MODELS WITH ECONOMETRIC THE METHOD

G.A.RAHIMOVA

SUMMARY

The forecast is a likelihood judgment about future condition of object of research. The forecast is a scientific model of future event, the phenomena, etc. The forecast is a calculation of an unknown economic indicator for the set factors on the basis of model. Forecasting is a development of a forecast; in narrow value - special scientific research of concrete prospects of development of any process. The main condition of need for forecasts is a lack of basic data. For a prediction of the future of data always doesn't suffice, however and at the solution of tasks in the present of data very often doesn't suffice. The more data отсутствует, the it is more difficult to restore and do them a forecast. In process of reduction of volumes of missing data forecasts are specified, at completeness of basic data the forecast is replaced with usual calculation with some error.

Estimation of accuracy of a forecast - a necessary part of procedure of the qualified forecasting. Thus usually use likelihood and statistical models of restoration of dependence, for example, build the best forecast on a method of the maximum credibility. Are developed parametrical (usually on the basis of model of normal mistakes) and nonparametric estimates of accuracy of a forecast and confidential borders for it (on the basis of the Central Limiting Theorem of probability theory).

In article it is published accuracy of methods of forecasting and a technique of an assessment of adequacy of models with an econometric method.

Keywords: econometric methods, econometric modeling, forecasting, risk, forecasting errors (trends).

FİZİKA

УДК 541.122:535.568

ФИЗИКО-ХИМИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ
ВОДНЫХ РАСТВОРОВ ДЕКСТРАНА

*Э.А.МАСИМОВ, *С.Я.ОДЖАГВЕРДИЕВА,
**Ф.А.ДЖАФАРОВА,*Н.Дж.МУСАЕВА,*Я.Х.ШАХВЕРДИЕВ

*Бакинский Государственный Университет

**Бакинский Инженерный Университет

fidan.ceferova91@gmail.com

Методами волюмометрии, рефрактометрии, поляриметрии, спектрофотометрии и вискозиметрии при 298,15К изучены водные растворы декстрана с молекулярной массой 40000 г/моль. Показано, что наличие минимума на кривой зависимости парциального мольного объема от концентрации может служить признаком образования в растворах более структурированных образований, что подтверждается результатами других методов физико-химического анализа. Анализ экспериментальных данных позволяют утверждать о существовании следующей границы разбавленных растворов - $W < 5\%$, в случае водных растворов декстрана с указанной молекулярной массой.

Ключевые слова: парциальный мольный объем, оптическая активность, оптическая плотность, характеристическая вязкость.

Хотя исследованию реологических и объемных свойств водных растворов декстранов уделяется достаточное внимание [1-4], некоторые другие свойства этих растворов, такие как показатель преломления (n_D), величина угла вращения плоскости поляризации (α_D), электронные спектры поглощения (оптическая плотность растворов) и т.д., недостаточно хорошо изучены. При исследовании растворов, для получения комплекса взаимосогласованных данных, важно использовать сравнительно широкий спектр различных методов физико-химического анализа. Данная работа посвящена исследованию водных растворов декстрана ($M=40000$ г/моль) методами волюмометрии, рефрактометрии, поляриметрии, спектрофотометрии и вискозиметрии. В относительно широком интервале концентраций ($W \leq 10$ вес. %) при

298,15К были определены плотность (ρ^{25}), показатель преломления (n_D^{25}), величина угла вращения плоскости поляризации (α_D^{25}), сняты электронные спектры поглощения водных растворов декстрана, а также измерена динамическая вязкость (η^{25}) водных растворов декстрана.

Материалы и методы исследования

Растворы готовили на бидистиллированной воде в мерных колбах на 25 мл, с предварительно установленными объемами с точностью $\pm 0,005$ мл, при температуре $298,15 \pm 0,02$ К. В работе использован декстран производства Бельгия (Chem-Lab NV). Измерения вязкости растворов декстрана проводились на приборе SVM 3000/G2 Stabinger Vis-kometr, Anton Paar (Австрия). Электронные спектры поглощения водных растворов декстрана были сняты на спектрофотометре SPEKORD 200 plus в интервале длин волн 190-1000 нм. Показатель преломления растворов определяли на рефрактометре марки ИРФ-454Б с точностью $\pm 0,0002$, а величину угла вращения плоскости поляризации растворов декстрана измеряли при D линии натрия ($\lambda = 589,3$ нм) на автоматическом поляриметре марки Autopol III производства Rudolph Analytical (USA) с точностью измерения $\pm 0,001$. Были вычислены мольный объем (V_M^{25}) растворов, парциальный мольный объем декстрана в водных растворах (\bar{V}_D), оптическая плотность при $\lambda_{max} = 278$ нм, удельное вращение $[\alpha_D^{25}]$ и приведенная вязкость ($\eta_{пр}^{25}$) приготовленных водных растворов декстрана.

Результаты исследования и их обсуждение

Прежде всего, отметим, что зависимости плотности (ρ) и показателя преломления водных (n_D) растворов декстрана от концентрации, выраженной в весовых процентах, хорошо описываются уравнением типа

$$\rho = \rho_0 + AW_D^B \quad (1)$$

которое можно привести к линейной зависимости

$$\ln \Delta \rho = \ln A + B \ln W_D \quad (2)$$

где $\Delta \rho = \rho - \rho_0$ (ρ_0 -плотность чистого растворителя), W_D - весовая доля декстрана в растворе.

Эта зависимость $\ln \Delta \rho = f(\ln W_D)$ представлена на рисунке 1 и является линейной. Найдены константы этого уравнения: $A = 0,002775$ и $B = 1,1791$ ($R^2=0,9989$). Таким образом, зависимость плотности водных растворов декстрана от концентрации (W_D) может быть описана следующим соотношением

$$\rho = 0,9971 + 2,755 \cdot 10^{-3} \cdot W_D^{1,1791} \quad (3)$$

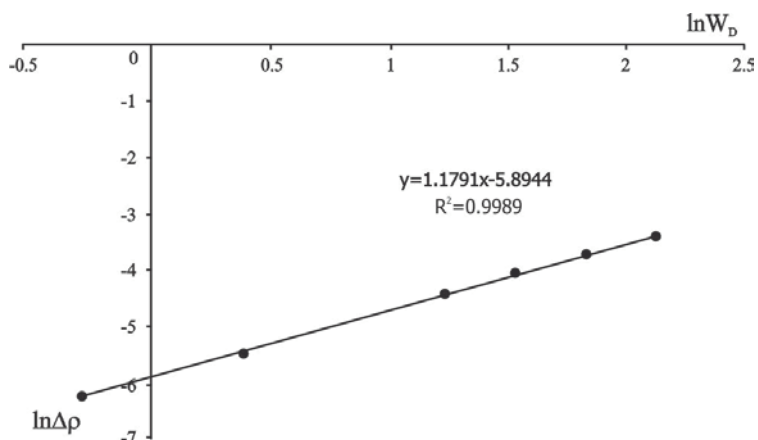


Рис.1. Зависимость $\ln \Delta \rho = f(\ln W_D)$ для водных растворов декстрана при 298,15К.

Аналогично, для зависимости показателя преломления водных растворов от концентрации декстрана было получено соотношение

$$n_D^{25} = 1,3325 + 1,75 \cdot 10^{-3} W_D^{0,9493} \quad (R^2 = 0,9995) \quad (4)$$

где W_D – весовая доля декстрана в растворе.

Были рассчитаны мольные объёмы указанных растворов (V_M^{25}), зависимость которого от концентрации декстрана, выраженной в мольных долях (X_D), представлена на рис.2. Как видно из рисунка, зависимость $V_M^{25} = f(x_D)$ является практически линейной и удовлетворительно описывается уравнением прямой ($R^2 = 0,9988$)

$$V_M^{25} = 18,085 + 24802x_2 \quad (5)$$

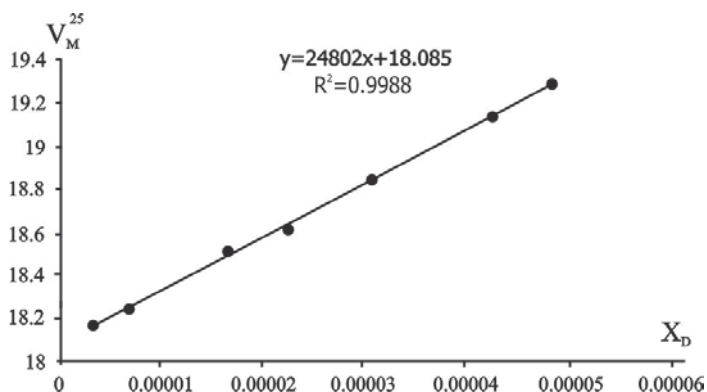


Рис.2. Зависимость мольного объема водных растворов от мольной доли декстрана.

Линейная зависимость мольного объема раствора от состава позволяет принять парциальный мольный объем воды в растворах (\bar{V}_1) равным 18,085 мл/моль и рассчитать через кажущиеся мольные объемы парциальные мольные объемы декстрана в водных растворах [5]. На рисунке 3 представлена зависимость парциального мольного объема декстрана (\bar{V}_D) в водных растворах от концентрации полисахарида (кривая $\bar{V}_D = f(m)$, m -моляльность раствора), которая хорошо описывается уравнением

$$\bar{V}_D = A + Bm + Cm^2 \quad (4)$$

где $A=30686$, $B=1270,910^4$, $C=52,49 \cdot 10^8$ ($R^2=0,9998$)

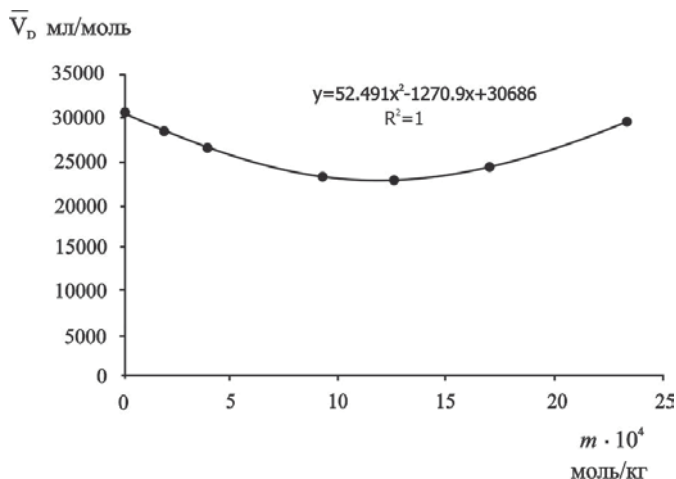


Рис.3. Зависимость парциального мольного объема декстрана в водных растворах от концентрации полисахарида при 298,15K

Как было показано в работе [3], для сильно разбавленных растворов (до 1 вес.%) парциальный мольный объем декстрана в водных растворах линейно уменьшается с концентрацией. Как видно из рисунка 3, в области сравнительно малых концентраций парциальный мольный объем декстрана также линейно уменьшается с увеличением содержания последнего. Уменьшение парциального мольного объема декстрана с концентрацией раствора должно быть связано с процессом структурирования растворителя – воды. Как видно из рисунка 3, кривая $\bar{V}_D = f(m)$ проходит через минимум. В работе [6] указывается на то, что возрастание энергии активации вязкого течения (E_a) с концентрацией связано с ростом структурированности растворов полимеров по сравнению с растворителем (водой). Как было показано в работах [7-8], увеличение содержания полимера в растворе приводит не только

к росту энергии активации вязкого течения, но также может привести к изменению наклона кривой $E_a = f(W)$, а появление минимума на кривой зависимости парциального мольного объема от концентрации может служить признаком возникновения в водных растворах полимеров более структурированных образований, что, по всей вероятности, является причиной увеличения парциального мольного объема декстрана при повышенных концентрациях. Сказанное также подтверждается анализом кривых зависимостей оптической плотности и приведенной вязкости растворов от концентрации полимера.

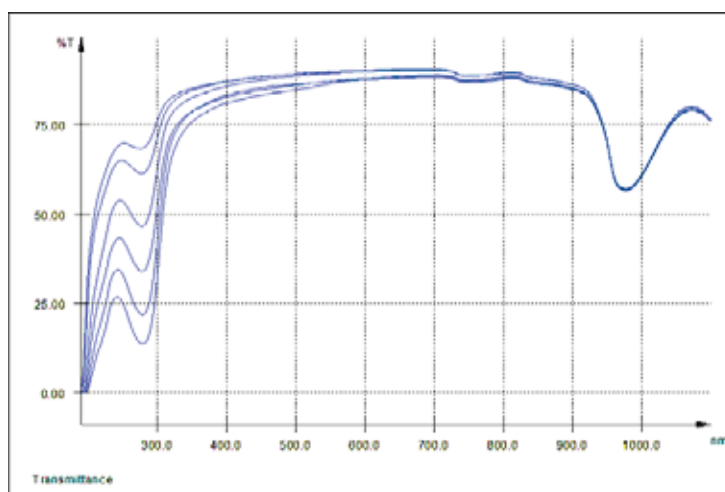


Рис.4. Электронный спектр поглощения водных растворов декстрана.
Концентрации декстрана в растворе (в вес. %) сверху вниз:
1,03; 1,683; 3,27; 4,834; 7,71; 10,54. $\lambda_{\max} = 278$ нм

Кривая зависимости оптической плотности водных растворов декстрана от концентрации (кривая $D = f(C_M)$ при $\lambda_{\max} = 278$ нм) может быть описана в зависимости от области концентрации двумя линейными уравнениями:

$$C_M \leq 1 \cdot 10^{-3} \text{ моль/л} \quad R^2 = 0,9999 \quad D = 0,0891 + 325,68 C_M \quad (5)$$

$$C_M \geq 1 \cdot 10^{-3} \text{ моль/л} \quad R^2 = 0,9995 \quad D = 0,1424 + 293,56 C_M \quad (6)$$

Следовательно, изменение молярного коэффициента поглощения водных растворов декстрана в зависимости от области концентрации подтверждает выводы волюмометрии о возникновении пространственных структурных образований в более концентрированных растворах. Была также изучена вязкость водных растворов декстрана. Получено

уравнение, которое хорошо описывает зависимость динамической вязкости от концентрации декстрана в растворе (W -вес. % декстрана) при 298,15 К

$$\eta^{25} = 0,8926e^{0,1712W} \quad (7)$$

Ниже, на рисунке 5 представлена зависимость приведенной вязкости водных растворов от концентрации декстрана, выраженной в числах граммов декстрана в 100 мл раствора

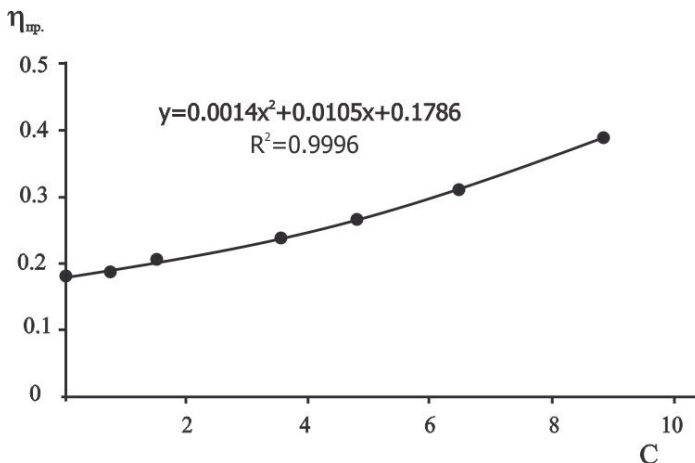


Рис.5. Зависимость приведенной вязкости водных растворов декстрана при 298,15К от концентрации раствора (C – число граммов декстрана в 100 мл раствора).

Отметим, что для более концентрированных водных растворов зависимость приведенной вязкости от концентрации декстрана ($W > 4,76$) может быть описана уравнением прямой, наклон которой превышает таковой для менее концентрированных растворов. Известно, что уравнение Марка-Хаувинка для зависимости характеристической вязкости от молярной массы декстрана, приведенное в работе (по данным Граната) [9] $[\eta] = 3,5 \cdot 10^{-3} M^{0,37}$, дает для молярной массы 40000 г/моль значение характеристической вязкости, равной 0,1765, что хорошо согласуется со значением, полученным нами ($[\eta] = 0,1786$)

$$\eta_{пр.} = 0,1786 + 0,0105C + 0,0014C^2 \quad (7)$$

($R^2=0,9996$). Значение константы Хаггинса согласно (7) равно $K_h = 0,329$.

Нами также была изучена оптическая активность водных растворов декстрана. Были измерены величина угла вращения плоскости по-

ляризации растворов α_D^{25} и вычислено удельное вращение $[\alpha_D^{25}]$ декстрана в этих растворах. Зависимость величины угла вращения плоскости поляризации света водных растворов декстрана является практически линейной функцией концентрации раствора (см. рис.6), что указывает на практическое постоянство удельного вращений растворов.

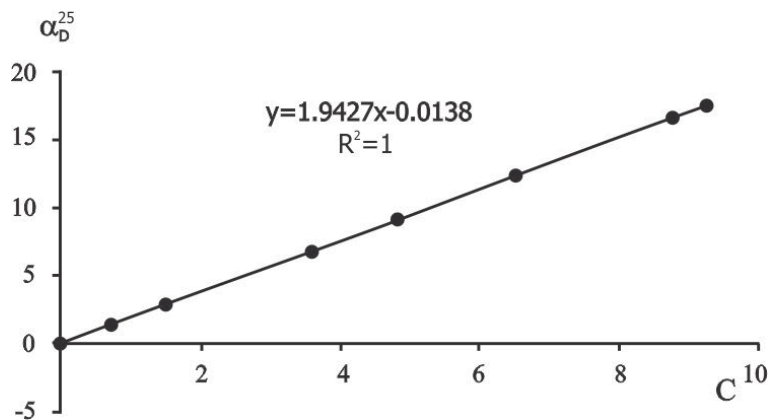


Рис.6. Зависимость величины вращения водных растворов от концентрации декстрана (C - число граммов декстрана в 100 мл раствора).

Известно, что оптическая активность весьма чувствительна к тонким деталям структуры, межмолекулярному взаимодействию, влиянию среды (растворителя) [10-12]. Тот факт, что величина удельного вращения практически не зависит от концентрации декстрана в растворе, указывает на неизменность состояния гидроксильных групп у 2, 3 и 4-го асимметрических углеродных атомов, а также кислорода α -1,6-глюкозидных связей. Такая неизменность окружения гидроксильных групп может быть объяснена, тем обстоятельством, что в сравнительно разбавленных водных растворах декстрана, наряду с водородными связями, образуемыми между гидроксильными группами α -глюкозидного звена и свободными молекулами воды, имеет место образование внутримолекулярных водородных связей между гидроксильными группами различных звеньев макромолекулы, приводящее к образованию макромолекулярных клубков. По мере увеличения концентрации декстрана в растворе и возникновения контактов между макромолекулами полисахарида, внутримолекулярные водородные связи замещаются на водородные связи, образуемые между гидроксильными группами различных макромолекул, что в конечном итоге может приводить к образованию сравнительно устойчивых пространственных структур с межмолекулярными водородными связями. Следует также отметить, что

градиент показателя преломления водных растворов декстрана (dn/dc) также меняется с концентрацией, оставаясь практически постоянным при повышенных концентрациях ($W \geq 5$ вес. %). Таким образом, общий анализ результатов различных методов физико-химического анализа: волнометрии, рефрактометрии, спектрофотометрии и вискозиметрии, указывает на образование в сравнительно концентрированных водных растворах декстрана относительно стабильных пространственных структур с кооперативными водородными связями. В разбавленных растворах полимеров характеристическая вязкость используется в качестве критерия при оценке концентрации раствора: раствор считается разбавленным, если $C < \frac{1}{|\eta|}$ [13]. В случае водных растворов декстрана с молекулярной массой 40.000 г/моль, величина обратная характеристической вязкости $\frac{1}{|\eta|}$ и результаты волнометрии, рефрактометрии и спектрофотометрии позволяют утверждать о существовании такой границы разбавленных растворов ($W < 5$ вес. %) в случае водных растворов декстрана с молекулярной массой 40.000 г/моль.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вирник А.Д., Хомяков К.П., Скокова И.Ф. // Успехи химии, - 1975, - т.44, - №7, - с.1280-1307.
2. Толмачев В.Н., Луговая З.А., Половинкина Л.И., Понамарева Е.И. // Высокомолекулярные соединения. - 1982, - т.24, - серия Б, - №4, - с.255–258.
3. Алексеева О.В., Елисеева О.В. Химия и химическая технология. - 2007, - т.50, - вып.12, - с.118-120.
4. Алексеева О.В., Елисеева О.В. В сборнике: Актуальные проблемы химической науки, практики и образования. - Курск, - 2009, - с.74-75.
5. Bares J., Cerny S., Fried V., Pick J. Recueil de problèmes de chimie physique. Gauthier – Villars, Paris, - 1966, - p. 236–238 .
6. Шуляк И.В., Грушова Е.И., Семенченко А.М. // Журнал физ. химии. - 2011, - т.85, - №3, - с.485-488.
7. Масимов Э.А., Багиров Т.О., Оджагвердиева С.Я. // Фундаментальные исследования, - 2014, - №11, - 2411–2415 с.
8. Масимов Э.А., Оджагвердиева С.Я., Шахвердиев Я.Х., Багиров Т.О. // J. Vaku Engineering University, - v.1, - №2, - 2017, - p.193–198.
9. Цициашвили В.Г., Гринберг В.Я., Федин Э. И, Толстогузов В.Б. // Высокомолекулярные соединения, А. - 1978, - т.20, - № 11, - с.2573-2580.
10. Волькенштейн М.В. // Известия АН СССР, - 1953, - т.17, - №5, - с.574-580.
11. Баженов Н.М., Волькенштейн М.В. // Журнал физической химии. - 1954, - т.28, - в.7, - с.1299-1309.
12. Шахвердиев Я.Х., Саттар-заде И.С., Мустафаева А.Л. // Журнал физ. химии, - т.56, - в.9, - с.2319-2320.
13. Мединцева Е.А., Морозова П.Г. Растворы полимеров. - Ростов–на–Дону: РГУ, - 2006, - 46 с.

DEKSTRANIN SULU MƏHLULLARININ FİZİKİ-KİMYƏVİ TƏDQIQI

E.Ə.MƏSİMOV, S.Y.OCAQVERDİYEVA, F.Ə.CƏFƏROVA,
N.C.MUSAYEVA, Y.X.ŞAHVERDİYEV

XÜLASƏ

298,15 K temperaturda molyar kütləsi 40000 q/mol olan dekstranın sulu məhlulları volumometriya, refraktometriya, spektrofotometriya, polyarimetriya və viskozimetriya armetodları ilə öyrənilmişdir. Göstərilmişdir ki, parsial molyar həcmın qatılıqdan asılılıq əyrisində minimumun olması məhlullarda strukturlaşdırılma prosesinin baş verməsinin əlaməti kimi qəbul edilə bilər, buda digər fiziki-kimyəvi metodların nəticələri ilə təsdiq olunur. Təcrübi nəticələrin analizi qeyd olunan molyar kütləsi olan dekstranın sulu məhlullarında duru məhlullarının sərhədinin mövcudluğunu ($W < 5\%$) qeyd etməyə imkan verir.

Açar sözlər: parsial molyar həcm, optiki aktivlik, optiki sıxlıq, xarakteristik özlülük.

PHYSICO-CHEMICAL STUDY OF DEXTRAN AQUEOUS SOLUTIONS

E.A.MASIMOV, S.Ya.OJAGVERDIEVA, F.A.JAFAROVA,
N.J.MUSAYEVA, Ya.Kh.SHAKHVERDIEV

SUMMARY

Aqueous dextran solutions with a molecular weight of 40,000 g/mol were studied by volumometry, refractometry, polarimetry, spectrophotometry, and viscometry at 298.15 K. It is shown that the presence of a minimum in the curve of dependence of the partial molar volume on concentration can serve as a sign of the formation of more structured formations in solutions, which is confirmed by the results of other methods of physicochemical analysis. An analysis of the experimental data allows us to assert the existence of the following boundary of dilute solutions - $W < 5\%$, in the case of aqueous dextran solutions with the indicated molecular weight.

Keywords: partial molar volume, optical activity, optical density, characteristic viscometry.

PACS 68.65. Cd, 73.50. Bk

**РЕЛАКСАЦИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ В СВЕРХРЕШЕТКАХ
В СИЛЬНЫХ МАГНИТНЫХ ПОЛЯХ ПРИ РАССЕЯНИИ
НА ИОНИЗИРОВАННЫХ ПРИМЕСЯХ****С.Р.ФИГАРОВА, М.М.МАХМУДОВ**
Бакинский Государственный Университет
mehdimahmudov@bsu.edu.az

В работе определяется время релаксации при внутривозонных и межвозонных переходах для рассеяния носителей тока на ионах примеси в сверхрешетках в сильном магнитном поле и изучается влияние магнитного поля на это рассеяние. Показано, что в полях до 2 Тл при рассеянии на ионах примеси основной вклад в рассеяние дают внутривозонные переходы, в то время как в предельно сильных магнитных полях внутривозонное время релаксации уменьшается с магнитным полем и превалирует межвозонное рассеяние.

Ключевые слова: время релаксации, сверхрешетка, внутривозонное и межвозонное рассеяние, ионы примеси.

1. Введение. При низких температурах в структурах с двумерным и квазидвумерным электронным газом эффективными рассеивающими центрами электронов являются ионизированные примеси. Однако, необходимо учитывать какой вклад вносят в рассеяние внутривозонные и межвозонные переходы.

Сильное, квантующее магнитное поле влияет на процесс релаксации носителей заряда в кинетических эффектах [1]. Поэтому, при исследовании кинетических и оптических явлений в сверхрешетках в сильном магнитном поле необходимо учесть влияние магнитного поля на рассеяние. Доминирующим механизмом рассеяния в сверхрешетках при низких температурах, влияющим на подвижность и другие кинетические коэффициенты, является рассеяние на ионах примеси и как показано в [2] низкотемпературная подвижность в гетероструктурах в большой степени определяется концентрацией заряженных центров на границе. В отсутствие магнитного поля время релаксации в сверхрешетках довольно хорошо изучено [3-8], в то время как в сильном маг-

нитном поле, которое существенно влияет на рассеяние электронов таких исследований незначительно. Магнитное поле квантует движение носителей и влияет на рассеяние, что приводит к таким явлениям как отрицательное продольное магнитосопротивление и магнитотранспортным осцилляциям в низкоразмерных системах [9-15]. Так, в работе [14] показано, что в δ -легированном слое арсенида галлия продольное отрицательное магнитосопротивление связано с межподзонами переходами в сильном магнитном поле. Поэтому, необходимо учитывать какой вклад каждый из переходов (внутриподзонный и межподзонный) вносит в рассеяние.

Целью данной работы является определение времени релаксации при внутриподзонных и межподзонных переходах для рассеяния носителей тока на ионах примеси в сверхрешетках в сильном магнитном поле и изучить влияние магнитного поля на это рассеяние. Показано, что с ростом магнитного поля при внутриподзонных переходах время релаксации для рассеяния электронов проводимости на ионах примеси уменьшается по сравнению с межподзонными переходами. Получено, что значение поля, при котором начинает превалировать межподзонное рассеяние зависит от радиуса экранирования (концентрации примесей), периода сверхрешетки и от степени заполнения минизоны.

2. Энергетический спектр, волновая функция сверхрешеток в сильном магнитном поле и общее выражение для времени релаксации.

В сильном магнитном поле B , параллельном оси сверхрешетки z , имеет место квантование Ландау в плоскости слоя, а учет спина электрона приводит к зеемановскому расщеплению энергетических уровней. При этом закон дисперсии электронов проводимости в основной (нижней) минизоне сверхрешетки в приближении слабо взаимодействующих квантовых ям в магнитном поле имеет вид:

$$\varepsilon(N, k_z, \sigma) = (2N + 1)\mu B + \varepsilon_0(1 - \cos(ak_z)) + g^* \sigma \mu_0 B, \quad (1)$$

где $N = 0, 1, 2, \dots$ - осцилляторное квантовое число Ландау, k_z - z компонента волнового вектора, σ - оператор спина с собственным значением $\pm 1/2$, $\mu = (m_0/m_\perp)\mu_0$, m_0, m_\perp - масса свободного электрона и его масса в плоскости слоя сверхрешетки, соответственно, $\mu_0 = e\hbar/2m_0$ - магнетон Бора, g^* - фактор спинового расщепления, $m_H^{-1} = \varepsilon_0 a^2 \hbar^{-2} \cos(ak_z)$, m_H - продольная компонента эффективной массы, ε_0 - полуширина минизоны сверхрешетки, a - постоянная сверхрешетки.

Плотность состояний энергетического спектра (1) имеет вид:

$$g_B(\varepsilon) = \frac{1}{2(\pi R_B)^2 a} \sum_{N,\sigma} (2\varepsilon_0 \varepsilon_z - \varepsilon_z^2)^{-1/2} = \frac{1}{2(\pi R_B)^2 a \varepsilon_0} \sum_{N,\sigma} \sin^{-1}(ak_z), \quad (2)$$

здесь $k_z = k_z(\varepsilon, N, \sigma)$, $\varepsilon_z = \varepsilon(N, k_z, \sigma) - (2N + 1)\mu B - g^* \sigma \mu_0 B$, $R_B = (\hbar/eB)^{1/2}$ - магнитная длина.

При выполнении условий $\frac{\hbar}{\tau_{II}} < \varepsilon_0 < k_0 T$ и $k_0 T \leq \mu B$, можно ввести время релаксации [2], здесь τ_{II} - эффективное время рассеяние, соответствующие движению электрона вдоль оси сверхрешетки. Эти условия предполагают слабое рассеяние и большую длину свободного пробега вдоль оси сверхрешетки, что необходимо для формирования минизоны. Энергетический спектр сверхрешеток анизотропный, поэтому следует ожидать, что время релаксации также будет анизотропным. Для анизотропного рассеяния общее выражение для компонент тензора обратного времени релаксации $\hat{\tau}^{-1}$, вычисляется по формуле [16]

$$\frac{1}{\tau_i} = \sum_{k'} \left| 1 - \frac{k'_i}{k_i} \right| W_{kk'}, \quad (3)$$

где $W_{kk'}$ - вероятность перехода электрона проводимости из k - состояния в k' - состояние, k_i - компоненты волнового вектора.

Из формулы (3) видно, что при вычислении выражений компонент тензора обратного времени релаксации и определения их зависимостей от компонент волнового вектора k необходимо использовать явный вид вероятности перехода $W(k, k')$.

Вероятность рассеяния вычисляется квантово-механически по известной формуле:

$$W_{kk'} = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \langle k' | \hat{H} | k \rangle \right|^2 \delta(\varepsilon_{k'} - \varepsilon_k), \quad (4)$$

где \hat{H} - оператор перехода, равный:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left(\hat{p} + \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 - \frac{\mu}{s} \hat{s} \vec{B} + U(x, y, z), \quad (5)$$

где \hat{s} - оператор спина, \hat{p} - оператор импульса, \vec{A} - векторный потенциал, калибровка которого выбрана в виде $A_x = -By, A_y = A_z = 0$.

Ограничимся низшим порядком теории возмущения (борновское приближение) когда \hat{H} совпадет с оператором возмущения \hat{U} , ответственным за переход. Для вычисления матричного элемента надо знать волновые функции электрона проводимости, соответствующие энергетическому спектру (1), которые в магнитном поле имеют вид:

$$\Psi(\vec{r}) = \varphi(x - x_0) \phi(z) e^{ik_x y} \chi, \quad (6)$$

здесь

$$\varphi(x-x_0) = \frac{1}{\sqrt{R}} H_N \left(\frac{x-x_0}{R} \right) \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x-x_0}{R} \right)^2 \right], \quad (7)$$

где H_N - полином Эрмита N - порядка, $x_0 = -\frac{\hbar k_y}{\Omega m_n}$, обусловлена квантованием в магнитном поле

$$\phi(z) = \sqrt{\frac{a}{V}} \sum e^{ik_\alpha n} \xi(z - an), \quad (8)$$

где $\phi(z)$ - волновая функция электрона в сверхрешетки с осью в направлении z , $\chi = s_z \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha, & 0 < \alpha < \pi/2 \\ e^{i\beta} \sin \alpha, & 0 < \beta < 2\pi \end{pmatrix}$ - волновая функция, связанная с р-расщеплением спина в магнитном поле, $a + b$ - период сверхрешетки.

Специфика сверхрешеток заключается в том, что в силу закона сохранения энергии частица с волновым вектором k_z может упруго рассеиваться только в состояние $-k_z$, причем в сверхрешетках закон дисперсии $\varepsilon(k_z)$ неквадратичен. Подставляя формулы (4-8) в (3) и переходя от суммирования к интегрированию, для обратного времени релаксации получим:

$$\frac{1}{\tau_z(k_z)} = \frac{2\pi}{\hbar} g(\varepsilon_F) R_B^2 \int_0^{2k_z} q_\perp dq_\perp \left(\frac{1}{2} R_B^2 q_\perp^2 \right)^{N-N'} \exp(-R_B^2 q_\perp^2) |U_{q_\perp, -2k_z}|^2, \quad (9)$$

здесь $k_z^F = \arccos\left(\frac{1-\varepsilon_F/\varepsilon_0}{a}\right)$, U - Фурье-компонента рассеивающего потенциала, множитель $\left(\frac{R_B^2 q_\perp^2}{2}\right)^{N-N'}$ - ответственен за межподзонные переходы.

При рассеянии на ионизированных примесях для рассеивающего потенциала имеем:

$$|U(q_\perp)|^2 = \frac{N}{a^3} \left(\frac{e^2}{2\kappa_0 \kappa_s q_\perp} \right)^2 \frac{1}{(q_\perp^2 + k_s^2)^2} \exp(-2q_\perp^2 k_s^{-2}), \quad (10)$$

κ_0 - диэлектрическая постоянная, $\kappa_s = 1 + \frac{k_s}{q_\perp}$, $k_s = \frac{e^2 m}{\pi \hbar^2 \kappa \kappa_s a}$ - коэффициент экранирования Дебая, κ - диэлектрическая проницаемость.

Время релаксации обращается в нуль, когда $B = B_s = \frac{2\pi \hbar n a}{es}$ (где $s = 1, 2, 3, \dots$), исключительно за счет сингулярности плотности состояний и вблизи точек перехода. В условии сильного квантования в магнитном поле при вычислении матричного элемента на волновых функциях (7),

найденного из решения уравнения Шредингера, в выражении для времени релаксации появляется дополнительный множитель, который пропорциональный $\frac{R_B^2 q_{\perp}^2}{2} \exp\left(-\frac{R_B^2 q_{\perp}^2}{2}\right)$.

3. Время релаксации при рассеянии на ионах примеси.

Зависимость времени релаксации от магнитного поля входит через плотность состояний и импульс $q_{\perp} \approx p_B$ (где p_B определяется из выражения $k_{\perp}^2 = p_B^2(2N+1)$, $p_B = R_B^{-1}$). При каждом акте рассеяния электрон смещается поперек магнитного поля B на расстояние порядка R_B .

Рассмотрим индуцированное рассеяние на заряженных примесях, которое преобладает в области азотных температур в сильных магнитных полях до 30 Тл. Подставляя выражение (10) в формулу (9) для обратного времени релаксации при внутриволновых переходах имеем:

$$\frac{1}{\tau} = A_1 \frac{Ra}{r_0^2} g(\varepsilon_F) \phi(\zeta), \quad (11)$$

где $A_1 = \frac{(2\pi)^3 \hbar^2 N_i e a^{5/2}}{m^{3/2} \kappa^{1/2}}$, $r_0 = \left(\frac{4\pi e^2 n}{\kappa \varepsilon_0}\right)^{-1/2}$ - радиус экранирования, N_i - концентрация примесей, а функция экранирования имеет вид:

$$\phi(\zeta) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-x} dx}{(x + \zeta)^2}. \quad (12)$$

Строго говоря, экранирование в квантующем поле должно зависеть от q_{\perp} , однако при актуальных для рассеяния на примесях передачах $q_z \leq k_z$ и $q_{\perp} \leq R_B^{-1}$ длину экранирования можно считать независимой от волнового вектора. В этом случае, используя приближенное вычисление интеграла (12) при рассеянии на заряженных примесях для внутриволновых переходов при слабом экранировании носителей тока ($k_z r_0 \gg 1$) из формул (11) и (12) получим, что время релаксации $(\tau_B^{-1})_{\text{онз}}$ зависит от k_z и определяется формулой:

$$(\tau_B^{-1})_{\text{онз}} = \frac{1}{4\tau_0} \frac{aR_B}{r_0^2} \frac{1}{Z^2} \quad (13)$$

где $Z = ak_z$, $\tau_0 = \frac{1}{8\pi N_i a} \frac{m_{\perp}}{\hbar} \left(\frac{r_B}{a}\right)^{1/2}$, $r_B = \frac{\chi \hbar^2}{me^2}$ - Боровский радиус.

При межволновых переходах $q_z \approx R_B^{-1}$ поэтому вопрос, связанный с кулоновским расхождением не возникает и экранированием можно пренебречь. Наиболее существенными является переход из дна зоны $N=1$ в зону $N=0$ ($1 \rightarrow 0$) и из зоны $N=0$ на дно зоны $N=1$ ($0 \rightarrow 1$). Пер-

вый переход важен из-за сравнительно большого числа носителей в начальном состоянии, а второй - из-за большой вероятности перехода, чем наоборот. При межзонных переходах типа $1 \rightarrow 0$ время релаксации $(\tau_B^{-1})_{\text{мпз}}$ имеет вид:

$$(\tau_B^{-1})_{\text{мпз}} = \frac{1}{\tau_0} \left(\frac{R_B}{a} \right)^3 \frac{1}{Z}, \quad (14)$$

а для типа $0 \rightarrow 1$

$$(\tau_B^{-1})_{\text{мпз}} = \frac{1}{\tau_0} \left(\frac{R_B}{a} \right)^3 \left(\frac{1}{2} k_z^2 R_B^2 - 1 \right)^{-1/2} \frac{1}{Z}, \quad (15)$$

при выполнении условия $k_z R_B > 1$ из (15) получим

$$(\tau_B^{-1})_{\text{мпз}} = \frac{1}{2\tau_0} \left(\frac{R_B}{a} \right)^2 \frac{1}{Z}. \quad (16)$$

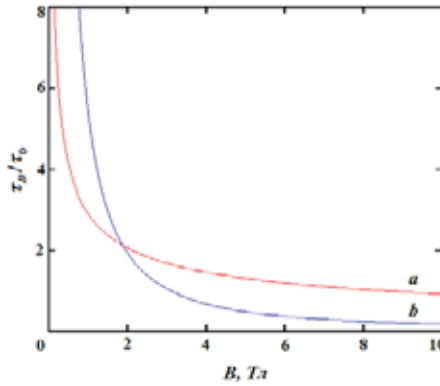


Рис.1. Зависимость межподзонного (a) и внутривподзонного (b) времени релаксации от магнитного поля при рассеянии на ионах примеси.

Отношение внутривподзонного времени релаксации к межподзонному при рассеянии на экранированных ионах примеси равно:

$$\frac{(\tau_B)_{\text{впз}}}{(\tau_B)_{\text{мпз}}} = \frac{R_B}{a} \left(\frac{r_0}{a} \right)^2 Z. \quad (17)$$

Из (17) следует, что с ростом магнитного поля отношение $(\tau_B)_{\text{впз}} / (\tau_B)_{\text{мпз}}$ уменьшается, так как в предельно сильных магнитных полях, когда $B > 2\pi\hbar na/e$ для вырожденного электронного газа $Z = ak_z = 2na\pi^2 R^2$ [15], следовательно внутривподзонное время релаксации уменьшается по сравнению с межподзонным (рис.1), причем значение поля при котором начинает превалировать межподзонное рассеяние зависит от соотношения между радиусом экранирования (концентрации примесей), периодом сверхрешетки и степенью заполнения минизоны сверхрешетки.

Получено, что с увеличением степени заполнения минизоны сверхрешетки отношение времени релаксации при внутривозонных переходах к времени релаксации при межвозонных переходах уменьшается (рис. 2).

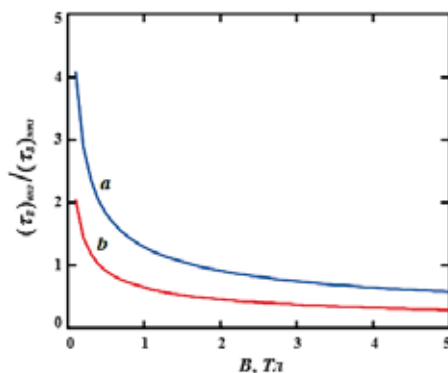


Рис.2. Зависимость отношения времени релаксации при внутривозонных переходах к времени релаксации при межвозонных переходах от магнитного поля: *a* - при $Z = \pi$, *b* - при $Z = \pi/2$.

В ультраквантовом пределе ($Z = ak_z = 2na\pi^2 R^2$) в сверхсильных магнитных полях время релаксации уменьшается с ростом магнитного поля как $\tau \propto B^{-5/2}$ - для внутривозонного и $\tau \propto B^{-1/2}$ - для межвозонного.

Наличие межвозонных переходов должно привести к осцилляциям продольной проводимости с разными периодами одного порядка или размывать осцилляции.

В случае сильного экранирования время релаксации определяется как:

$$(\tau_B^{-1})_{\text{экр}} = A_1 \frac{2r_0}{a} g(\varepsilon). \quad (18)$$

Из формулы (18) видно, что при сильном экранировании зависимость времени релаксации от энергии аналогична времени релаксации при рассеянии на акустических фонах, которая определяется плотностью состояний [17].

Заключение. В работе изучается влияние внутривозонных и межвозонных переходов на время релаксации сверхрешеток с косинусоидальным законом дисперсии при рассеянии носителей тока на ионах примеси в сильных магнитных полях. Показано, что в полях до 2 Тл при рассеянии на ионах примеси основной вклад в рассеяние дают внутривозонные переходы, в то время как в предельно сильных магнитных полях внутривозонное время релаксации уменьшается с магнитным полем и превалирует межвозонное рассеяние (рис.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Афанасова М.М., Степанов В.А., Коржавчиков М.А. Исследование электрон-фононного взаимодействия в структурах InAs/AlSb в режиме квантующих магнитных полей. Наносистемы: физика, химия, математика. 2012, т.3(6), с.36-46.
2. Быстров С.Д., Крещук А.М., Новиков С.В., Полянская Т.А., Савельев И.Г. Квантовое и классическое времена релаксации и свойства гетерограницы в селективно легированных гетероструктурах InP/In_{0.53}Ga_{0.47}As. Физика и техника полупроводников, 1993, т.27, в.4, с.645-653.
3. Davies J.H. The physics of low-dimensional semiconductors. Cambridge University press, 1998. 438 p.
4. Драгунов В.П., Неизвестный И.Г., Гридчин В.А. Основы наноэлектроники. Москва: Логос, 2006. 496 с.
5. Protasov D.Yu., Zhuravlev K.S. The influence of impurity profiles on mobility of two-dimensional electron gas in AlGaAs/InGaAs/GaAs heterostructures modulation-doped by donors and acceptors. Solid-State Electronics, 2017, v.129, p.66-72.
6. Askerov B.M., Figarova S.R., Guseynov G.I., Figarov V.R. Relaxation-time and electrical conductivity anisotropy of layered crystal at the scattering of charge carriers of impurity ions. AIP Conference Proceedings, 2007, v.905, p.43-47.
7. Breitzkreiz M., Brydon P.M.R., Timm C. Transport anomalies due to anisotropic interband scattering. Physical Review B 88(8), 2013, p.085103.
8. Orr J.M.S., Gilbertson A.M., Fearn M., Croad O.W., Storey C.J., Buckle L., Emeny M.T., Buckle P.D., Ashley T. Electronic transport in modulation-doped InSb quantum well heterostructures. Physical Review B 77, 2008, p.165334.
9. Bryksin V.V., Kleinert P. Transport in semiconductor superlattices in quantizing parallel electric and magnetic fields. Physica B: Physics of Condensed Matter, 1999, v.269, iss.2, p. 163-176.
10. Studenikin S.A., Rechkunov S.N., Toropov A.I., Koenraad P. Quantum magnetotransport oscillations of 2DEG in a short-period InAs lateral superlattice on a vicinal (001) surface in a GaAs/AlGaAs heterostructure. Semiconductor Science and Technology, 2002, v.17, iss.1, p.1-7.
11. Гантмахер В.Ф., Левинсон И.Б. Рассеяние носителей тока в металлах и полупроводниках. Москва: Наука, 1984, 349 с. Gantmakher V.F., Levinson Y.B. Carrier scattering in metals and semiconductors. Elsevier Science, 2012, 478 p.
12. Перов А.А., Пенягин И.В. Квантовые состояния носителей заряда и продольная проводимость двоякопериодических полупроводниковых решеточных структур n-типа в электрическом поле. Журнал экспериментальной и теоретической физики. 2015, 148(1), 127-132. 110-114.
13. Askerov B.M., Figarova S.R., Mahmudov M.M. Longitudinal magnetoresistance of layered crystals in a quantizing magnetic field taking into account the spin splitting. Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures, 2006, 33(2), p.303-307.
14. Falko V.I. Longitudinal magnetoresistance of ultrathin films and two-dimensional electron layers. Journal of Physics: Condensed Matter, 1990, v.2, iss.16, p. 3797-3802.
15. Figarova S.R. Negative longitudinal magneto-resistance of layered crystals taking into account the spin splitting. Physica Status Solidi (b), 2006, v.243 (6), p. R41-R43.
16. Askerov B.M., Figarova S.R. Thermodynamics, Gibbs Method and Statistical Physics of Electron Gases. Berlin: Springer Verlag, 2010, 374 p.
17. Фигарова С.Р., Махмудов М.М. Время релаксации при межзонном и внутризонном рассеянии электронов проводимости на фонах в сверхрешетках в сильном магнитном поле. Вестник Бакинского Университета, серия физико-математических наук, 2021, № 2, с. 92-101.

GÜCLÜ MAQNİT SAHƏSİNDƏ İFRATQƏFƏSLƏRDƏ İON AŞQARLARINDAN SƏPİLMƏ ZAMANI RELAKSASIYA PROSESLƏRİ

S.R.FİQAROVA, M.M.MAHMUDOV

XÜLASƏ

İşdə güclü maqnit sahəsində ifratqəfəslərdə yükdaşıyıcıların ion aşqarlarından səpilməsi zamanı altzonalardaxili və altzonalarası keçidlər üçün relaksasiya müddəti təyin edilmiş və bu səpilməyə maqnit sahəsinin təsiri öyrənilmişdir. Göstərilmişdir ki, ion aşqarlarından səpilmə zamanı sahənin $2 Tl$ qiymətinə qədər səpilməyə əsas payı altzonalarası keçidlər verdiyi halda, maqnit sahəsinə ifratböyük qiymətlərində sahənin böyüməsi ilə altzonalarası relaksasiya müddəti azalır və altzonalarası səpilmə üstünlük təşkil edir.

Açar sözlər: relaksasiya müddəti, ifratqəfəs, altzonalarası və altzonalardaxili səpilmə, hal sıxlığı.

RELAXATION PROCESSES IN SUPERLATTICES IN STRONG MAGNETIC FIELDS DURING SCATTERING BY IONIZED IMPURITIES

S.R.FIGAROVA, M.M.MAHMUDOV

SUMMARY

In this paper the relaxation time for intrasubband and intersubband transitions for the scattering of charge carriers by impurity ions in superlattices in a strong magnetic field are studied and takes into account the influence of the magnetic field on this scattering. It has been determined that with an increasing the magnetic field the role of intrasubband transitions on the relaxation time in comparison with intersubband transitions decreases. It was also found that the value of the field at which intersubband scattering begins to prevail depends on the screening radius, the period of the superlattice, and the degree of filling of the miniband.

Keywords: relaxation time, superlattice, intrasubband and intersubband scattering, impurity ions.

Pacs nömrəsi: 61.05.cp; 68.37.Hk; 68.37.Og; 78.67.Bf

SİLAR ÜSULU İLƏ ALINMIŞ $Cd_xZn_{1-x}S$ ƏSASINDA NANOMATERİALLARIN FİZİKİ XASSƏLƏRİ

M.B.MURADOV, Q.M.EYVAZOVA, L.R.QƏHRƏMANLI
Bakı Dövlət Universiteti
qahramanli.lala@mail.ru

$Cd_xZn_{1-x}S$ yarımqeçirici birləşmələrinin fiziki xassələrinə istifadə edilən texnoloji şərait, reaksiya parametrləri əsaslı şəkildə təsir göstərir. Təqdim edilən işdə SİLAR sintez üsulu ilə alınan bu birləşmələrin fiziki xassələri ilə reaksiya parametrləri arasında asılılıq araşdırılmışdır.

Açar sözlər: $Cd_xZn_{1-x}S$ nanomaterialları, qadağan olunmuş zona, fiziki xassələr.

GİRİŞ

Hal-hazırda, ikili və üçlü yarımqeçirici metal halkogenidləri müxtəlif üsullarla sintez olunurlar. Bu materiallar CdS, ZnS olmaqla yanaşı, $Cd_xZn_{1-x}S$ birləşməsində x -in müxtəlif qiymətlərində müxtəlif kombinasiyalar şəklində əldə olunurlar. Onlar fotonika, optoelektronika, fotovoltaiklərdə, günəş batareyalarında, katot şüa borusu üçün elektrolüminessans cihazlar, emissiya displeylərində, sintilator kimi istifadə üçün nisbətən əlverişli metal sulfidləri hesab olunur.

SİLAR sintez üsulundan istifadə etməklə belə materialların əldə edilməsi asan başa gəlir. Eyni zamanda, bu cür materialların fiziki xassələrini də geniş diapazonda variasiya etmək imkanı mövcuddur. Belə ki, $Cd_xZn_{1-x}S$ birləşmələrinin fiziki xassələrinə reaksiya parametrlərinin təsiri haqqında ədəbiyyat analizi aparılmışdır.

Təqdim olunan işdə CdS ikili birləşməsinin optik, elektrik xassələri, morfoloqiyası reaksiya parametrindən asılı olaraq dəyişir. Dövrələrin sayı artdıqca Cd/Zn nisbəti artmış (40 dövrədə-0.93; 70 dövrədə-0.96), daha sonra azalmış (100 dövrədə-0.92), təbəqələrin qalınlığı artmışdır (18 nm; 44 nm; 78 nm). Dövrələrin sayı 40-dan 100-ə doğru artdıqca, $E_g=2.35$ eV, 2.28 eV, 2.2 eV kimi dəyişir [1].

Təbəqələrin fotolüminissensiya xassələri otaq temperaturunda, udulma

spektri müxtəlif temperaturalarda tədqiq edilmişdir. Adi şəraitdə CdS-in E_g qiyməti 2.22 eV olmuşdur. Temperatur artdıqca, E_g -nin qiyməti azalmışdır ($T=10K-E_g=2.22$ eV; $T=100K-E_g=2.21$ eV; $T=200K-E_g=2.19$ eV; $T=300K-E_g=1.92$ eV). Sındırma əmsalı və E_g -nin qiyməti yarımkeçiricilər üçün onların tətbiq sahəsində fundamental rol oynayırlar. Bu iki parametrlər bir-biri ilə Moss bərabərliyi ilə əlaqələnilir. Temperatur artdıqca sındırma əmsalının qiyməti artmışdır (2.43-dən 2.74-ə qədər). Sındırma əmsalının qiyməti E_g ilə sıx bağlı olduğundan kiçik E_g -si olan materialların sındırma əmsalının qiyməti böyükdür [2].

Stabiləşdirici kimi trietanolamin (TEA) istifadə etdikdə CdS təbəqələrinin qalınlığı artmış və nahamarlıq effektiv şəkildə azalmışdır [3].

Kompleks agent kimi heksametilenetetramindən istifadə etdikdə alınan CdS nazik təbəqələrinin SEM təsvirlərindən görünür ki, təbəqə şüşə altlığda yaxşı kristallaşmış nizamlı şəkildə düzülmüş hissəciklər formasındadır. Rentgen nəticələrinə əsasən 2-3 nm-li hissəciklər aqlomerasiya etmişlər [4]. Burada, konsentrasiyanın artması ilə E_g azalmış (2.32-2.24eV), udma foton enerjisi azalmış, udulma əmsalı artmışdır. Absorbsiya əmsalındakı bu artım CdS hissəciyinin ölçüsünün artması ilə əlaqədardır. Dislokasiya sıxlığı konsentrasiya artdıqca azalmışdır (1.6780 $\times 10^{13}$; 1.7140 $\times 10^{13}$; 1.61879 $\times 10^{13}$). Kristallıq xassələri və kristallitlərin ölçüləri konsentrasiya artdıqca artmışdır. AFM-ə əsasən formalaşan təbəqənin nahamarlığı, təbəqələrin hündürlüyü və qəfəs ölçüləri konsentrasiya artdıqda artmışdır [4].

SEM-dən Si altlığda formalaşan CdS təbəqələrinin yaxşı kristallaşmış hissəciklərdən ibarət olduğu, bircins, bərabər paylandığı görünmüşdür. Element analizindən Cd və S elementlərinin atom faiz nisbəti 20.82:9.81, ZnS üçün Zn və S elementlərinin nisbəti isə 23.44:11.4 kimi təyin edilmişdir. SEM təsvirlərindən ZnS-in nano diapazonda formalaşdığı müəyyən edilmişdir [5].

Element analizinə görə Cd:S nisbəti 59:41 kimi təyin edilmişdir. SEM təsvirlərindən hissəciklərin orta ölçüsünün 20 nm olduğu təyin edilmişdir. E_g -nin qiymətində mavi sürüşmə müşahidə edilmişdir. Sürüşmə dövrlərin sayına görə azalmışdır. 2, 4, 6, 8 dövrlərdə əldə edilmiş nümunələrin E_g -nin qiyməti uyğun olaraq 2.97eV; 2.49eV; 2.42eV; 2.33eV kimi azalmışdır [6].

Dövrlərin sayı 10, 15, 20 artdıqca E_g -nin qiyməti uyğun olaraq 2.49 eV; 2.46 eV; 2.44 eV azalmışdır. Dövrlərin sayı artdıqda formalaşan nümunədə hissəciklərin ölçüsünün böyüməsilə bağlıdır [7]. Dövrlərin sayını sabit saxlamaqla CdS nazik təbəqəsində S/Cd-nin ~1:1, 3:1, 5:1, 7:1 nisbətində, uyğun olaraq, hissəciklərin ölçüsü 2.5 nm; 3.0 nm; 4.1 nm; 4.3 nm kimi artmışdır. Eyni zamanda nisbəti sabit saxlamaqla dövrlərin sayının 15, 30, 45 qiymətində hissəciklərin ölçüsü 2.3 nm; 2.5 nm; 2.7 nm olmuşdur. S/Cd nisbəti artdıqca E_g -nin qiyməti 2.53 eV; 2.50 eV; 2.40 eV azalmışdır [8].

Tablama zamanı ölçülər artdıqda E_g 2.45 eV-dan 2.42 eV-a qədər azalmışdır. Qəfəs ölçüləri böyümüş, E_g -nin qiyməti azalmışdır. Tablanmış nümunələrdə (71%) ftohəssaslıq ilkin nümunələrdən (58%) daha yüksəkdir. Nümunələrin aktivləşmə enerjisi ilkin nümunədə 0.5053 eV, tablanmış nümunələrdə 0.3594 eV olmuşdur. Yəni temperatur artdıqda aktivləşmə enerjisi azalmışdır [9].

SEM-ə əsasən hissəciklər kiçik və böyük sferik formada əmələ gəlmiş və bircins, hamar şəkildə paylanmışlar. Hall ölçmələrindən Zn ionlarının konsentrasiyası 6% artdıqda, nümunələrin müqaviməti azalmış, sonra nisbətən artmışdır. Zn ionunun konsentrasiyası 6%-ə qədər olduqda müqavimət gücünün azalması, Cd^{2+} ionlarının Zn^{2+} ionları ilə əvəzlənməsi səbəbindən təbəqələrin yükdaşıyıcılarının konsentrasiyasının artması mümkün olmuşdur [10].

TiO_2 təbəqəsinin üzərində hazırlanan CdS kvant nöqtələrinin rekombinasiyasının qarşısını almaq üçün 3 dəq müddətində kation və anion mənbələrində saxlanaraq ZnS passiv qatı yaradılmışdır. Təmiz TiO_2 təbəqəsinin və CdS hissəcikləri adsorbsiya edilmiş TiO_2 təbəqəsinin SEM təsvirlərinin müqayisəsindən görünür ki, adsorbsiya müddətinin artması ilə CdS hissəcikləri məsamələrdə adsorbsiya olaraq böyük ölçülü hissəciklər əmələ gətirir. SEM-ə əsasən 40 dəq müddətində sintez olunan CdS hissəcikləri daha çox aqlomerasiya etmişdir. Sorbsiya müddəti 5 dəq olduqda hissəciyin orta radiusu 2 nm hesablanmışdır. Sorbsiya müddəti artdıqca hissəciklərin ölçüsü tədricən artmışdır ($t=5$ dəq 2.00 nm; $t=10$ dəq 2.86 nm; $t=20$ dəq 2.95 nm; $t=30$ dəq 3.05 nm; $t=40$ dəq 3.21 nm). Sorbsiya müddəti 40 dəq olduqda hissəciyin ölçüsü ~ 3.21 nm olmuşdur. Müddət artdıqca hissəciklərin ölçüsü böyümüş, E_g kiçilmişdir. Udulma spektrində həcmi kristallarla müqayisədə mavi sürüşmə (512.7 nm) baş vermişdir. Formalaşan hissəciklərin ölçülərinin həcmi kristalların ölçülərindən kiçikdir. Sorbsiya müddətinin 5-40 dəq intervalında dəyişməsi nəticəsində qısa qapanma cari sıxlığı artır, açıq dövrə gərginliyi isə bir qədər artır [11].

SEM-ə əsasən CdS təbəqəsində hissəciklər 5-15 nm ölçülü polikristallik struktura malikdir. TEM və SEM-ə əsasən CdS nanohissəciklərinin aqlomerasiya etdiyi və ölçülərin 5-15 nm olduğu təyin edilmişdir. Udulma spektrindən mavi sürüşmə müşahidə olunmuşdur və $E_g=2.56$ eV hesablanmışdır. E_g -nin qiymətinin artımı kvant ölçülü effeqlərlə izah olunmuşdur.

CdS nazik təbəqəsinin udulma spektrlərinə əsasən hissəciklərin ölçüləri artdıqca E_g azalmışdır. Spektrdə mavi sürüşmənin baş verməsi ikinci dövrdə kiçik nanohissəciklərin əmələ gəlməsilə bağlıdır. Kiçik dövrlərdə və hissəciyin ölçülərinin kiçik qiymətlərində CdS-in E_g həcmi kristalların E_g -dən kiçikdir. Bu nanohissəciklərdə olan kvant ölçülü effeqlərlə izah olunur. SEM-ə əsasən dövrlərin sayı artdıqda kiçik ölçülü nanohissəciklər aqlome-

rasiya edərək daha böyük ölçülü hissəciklər əmələ gətirirlər [8].

SEM-ə əsasən hissəciklərin bircins şəkildə nukleasiyası baş vermişdir. Orta buraxma spektrinin intensivliyi 10 dövrdə 90%-dən böyük, 60 dövrdə isə 77%-ə qədər azalır. Dövrələrin sayı artdıqda E_g 2.49 eV-dan 2.44 eV-a qədər azalmışdır [7].

TiO₂/CdS/ZnS quruluşları güc çevirmə səmərəliliyinə görə istifadə edilir. CdS kvant nöqtələri müxtəlif həlledicilərdə sintez edilmişdir. Bu zaman güc çevirmə səmərəliliyinə görə 2.8%-dan 3.7%-a qədər artırılmışdır. Həlledici etanol, yuyucu reagent metanoldan istifadə edilmişdir. Buna iki müxtəlif həlledicidən istifadə etməklə nail olunmuşdur. Bunun əvəzinə həlledici kimi etanol və ya metanoldan istifadə edilmişdir. Həlledici və yuyucu agentlər olaraq eyni məhluldan istifadə etməklə yüksək həssaslığı olan məsaməli TiO₂ əldə etmək mümkündür. E_g TiO₂ üçün 3.28 eV, məhlul olaraq etanol və sudan istifadə etdikdə $E_g=2.4$ eV, etanol və etanol istifadə etdikdə $E_g=2.31$ eV, metanol və metanol istifadə etdikdə $E_g=2.28$ eV, etanol və metanol istifadə etdikdə $E_g=2.24$ eV qiymətini almışdır. Məhlul olaraq etanol-metanol istifadə etdikdə güc çevirmə səmərəliliyi 3.23% artmışdır, etanol-etanol istifadə etdikdə güc çevirmə səmərəliliyindən 14% çoxdur. Bu metoddan istifadə edərək güc çevirmə səmərəliliyi 3.7% artmışdır. İstifadə edilən həlledicilərdən asılı olaraq alınan nümunələrin fiziki xassələri dəyişmişdir [12].

Kation mənbəyi kadmium asetat istifadə etdikdə günəş batareyalarında enerji çevirmə effektivliyi 2.15%, kadmium nitrat istifadə etdikdə onun effektivliyi 1.44% olmuşdur. Kadmium asetatla alınan nümunənin effektivliyi kadmium nitratla alınan nümunənin effektivliyindən 40% çox olmuşdur. Fərqli mənbələrin istifadəsində pH dərəcəsinin müxtəlifliyi udulma dərəcəsi və batareya göstəricilərində fərqləri ortaya çıxarmışdır. Aydın olmuşdur ki, eyni miqdarda kadmium asetat və kadmium nitratdan istifadə etdikdə ən çox udulma kadmium asetat mənbəyindən istifadə etdikdə müşahidə olunur. 24-cü dövrdə CdS nanohissəcikləri TiO₂ daxilində kiçik məsamələrdə formalaşmış və $E_g=2.03$ eV olmuşdur. Spektrlərə əsasən dövrlərin sayının artması udulmanı böyük dalğa uzunluğuna doğru sürüşdürür. Dövrələrin sayı 6 olduqda mavi sürüşmə baş vermişdir. Bu kvant ölçülü effektlərlə izah olunur. pH qiymətinin dəyişməsi ilə udulma dərəcəsi dəyişir, beləliklə fotoanoda çökdürülən kvant nöqtələrinin miqdarına təsir edir. Bu pH dəyərinin və CdS nanohissəciklərinin udulma dərəcəsinin böyük olması ilə əlaqədardır. Cd ionunun miqdarının artdıqda udulma spektrində qırmızı sürüşmə müşahidə olunmuşdur [13].

Temperaturun artması ilə E_g və elektrik müqaviməti azalmışdır (0.419 $\Omega^x\text{sm}^5$; 0.24 $\Omega^x\text{sm}^5$; 0.192 $\Omega^x\text{sm}^5$; 0.186 $\Omega^x\text{sm}^5$; 0.125 $\Omega^x\text{sm}^5$). SEM təsvirləri səthin homogen və bərabər paylanmasını göstərir [14].

S/Cd nisbətinin qiyməti artdıqda (1:1; 7:1) element analizində nisbət qiyəti 0.8308-dən 1.04-ə qədər artmışdır. S/Cd nisbəti artdıqda E_g artmışdır [15]. Nisbət artdıqca E_g 2.35 eV; 2.39 eV; 2.40 eV; 2.46 eV kimi artmışdır. Element analizinə əsasən nisbət artdıqda stexiometrik tərkibdə element nisbəti 0.8308; 0.9264; 1.03; 1.04 olaraq artmışdır [15].

CdS nazik təbəqələrində sorbsiya müddəti dəyişdikdə hissəciklərin ölçüləri 14.1 nm-dən 5.6 nm-ə qədər dəyişmişdir. Buraxma spektrinə əsasən sorbsiya müddəti artdıqca buraxma dəyəri azalmışdır. Anion mənbəyinin sorbsiya vaxtının artması ilə təbəqənin kristallıq dərəcəsi azalmış, amorf faza əmələ gəlmişdir. Sorbsiya müddəti artdıqca Cd/S nisbəti azalmışdır. SEM təsvirlərinə əsasən sorbsiya müddəti artdıqda (5 san; 10 san) nanonaqillərin uzunluğu uyğun olaraq 25 nm, 38 nm və 15 san-də kubik və heksoqonal faza formalaşan hissəciklərin 150 nm ölçülü nanonaqillərdən ibarət olduğu aşkar olunmuşdur. CdS nazik təbəqələri anion mənbəyində müxtəlif sorbsiya müddətlərində (5 san, 10 san, 15 san) sintez edildikdə E_g əvvəlcə artır (2.1 eV-dan 2.62 eV-ə qədər) daha sonra azalır (2.62 eV-dan 2.20 eV-ə qədər). Deməli, E_g -yə həm təbəqənin qalınlığı, həm də sulfid ionlarının miqdarı təsir göstərir. Bu dəyişiklik kükürd komponentindən yaranan yeni əlaqələrin nisbətində artması ilə izah edilmişdir [16].

Adi şəraitdə sintez edilmiş nümunələrdə S/Cd nisbəti artdıqda E_g qiyməti artmışdır. Tablamada nisbət artdıqca E_g qiyməti artmışdır. SEM təsvirlərindən hissəciklər sferik yetişmiş və məhlulda S:Cd nisbəti artdıqca hissəciklərin diametri azalmışdır (120 nm-dən 50 nm-ə qədər). Tablanmış nümunələrdə nisbət artdıqca hissəciklərin ölçüləri artmışdır. Hissəciklərin forma və ölçüləri müxtəlif olmaqla 80 nm-dən 350 nm-ə qədər dəyişmişdir. Element analizindən S:Cd nisbəti 0.8325 kimi hesablanmışdır. Lakin nisbət artdıqca elementlərin atom faiz nisbəti 1.0508-ə qədər artmışdır. Tablanmış nümunələrdə bu nisbət artmışdır.

TiO₂ altlıqda CdS nazik təbəqəsinin sintezində dövrlərin sayı 12 olduqda müşahidə olunan optik diapazon, 9 və 15-ci dövrlərdəki optik diapazondan daha geniş olmuşdur. TiO₂/CdS-in 9 dövrdə udulma zolağı 470 nm-dir. 12 dövrdə udma zolağı 470 nm-dən 545 nm-ə qədər genişlənməmiş və 15 dövrdə 520 nm-ə enmişdir. Dövrlərin sayı artdıqca qırmızı sürüşmə baş vermişdir. TEM təsvirlərinə əsasən CdS nanohissəciklərinin ölçüləri 10 nm olmuşdur. Dövrlərin sayı artdıqca təbəqənin qalınlığı xətti artmışdır.

Tablanmış materialların fotohəssaslığı daha yaxşı göstəricilərə malikdirlər. Səth dağılmaları və kələ-kötürlüyü səbəbindən temperatur artdıqca buraxma spektində dəyişmə müşahidə edilmişdir. 373K, 573K, 673K-də tablanmış nümunələrin E_g qiyməti uyğun olaraq 2.2 eV, 2.1 eV, 1.9 eV kimi hesablanmışdır. Alınan CdS təbəqəsində Cd:S atom faiz nisbəti 52:48 olaraq hesablanmışdır. Ölçmələr göstərmişdir ki, temperatur artdıqca mü-

qavimət və aktivləşmə enerjisi azalmış, keçiricilik artmışdır. Alınmış CdS nazik təbəqələri n-tip keçiriciliyə malikdirlər [17].

CdS nanohissəcikləri TiO₂-nin səthinə çökdürüldükdə E_g-nin qiyməti 3.0 eV-dan 2.4 eV-a qədər azalmışdır. Tiolla örtülmüş səthdə ion-səth qarşılıqlı təsiri yaxşı nəticələnmişdir. Dövrələrin sayı artdıqca CdS nazik təbəqəsində E_g=2.37 eV olmuş, udulma artmışdır [18].

Element analizindən CdS/TiO₂ birləşməsinin Cd:S nisbəti 1:1 olmuşdur. SEM-ə əsasən təbəqənin səthi homogen, hissəciklərin ölçüləri 7 dövrdə 3.6 nm, 9 dövrdə 4.7 nm olmuşdur. CdS birləşməsində dövrələrin sayı artdıqca E_g azalmış, hissəciklərin ölçüləri artmışdır. 1 dövrdən 11 dövrə qalxdıqda E_g-nin qiyməti 2.65 eV-dan 2.37 eV-a qədər azalmışdır. 9 dövrdəki nümunələrdə kvant ölçülü effektlər müşahidə olunmuşdur [19].

ZnS nazik təbəqəsinin fiziki xassələrinin reaksiya parametrlərindən asılı olaraq variasiyası da tədqiqatçıların diqqətini cəlb etmişdir.

Burada, sındırma əmsalı ilə E_g arasındakı əlaqə tədqiq edilmişdir. Təbəqənin qalınlığı artdıqca E_g-nin qiyməti 3.87 eV-3.58 eV intervalında dəyişmişdir. E_g azalanda sındırma əmsalı artmışdır [20].

ZnS nümunəsi kation və anion mənbəyinin konsentrasiyasının 0.1M, pH~10, sorbsiya müddəti 40 san, yuyulma müddəti 60 san, dövrələrin sayı 50 və temperaturun 300K olduqda alınmışdır. Nümunədə E_g=3.93 eV, səthinin morfoloqiyasının isə hamar olduğu müəyyən edilmişdir. SEM təsvirlərindən hissəciklər kiçik, bəzi yerlərdə aqlomerasiya müşahidə edilmişdir. S/Zn elementlərinin atom faiz nisbəti 1.06-a bərabər olmuşdur. Dövrələrin sayı artdıqca E_g azalmışdır, təbəqənin qalınlığı artmış, kristallıq dərəcəsi azalmışdır. E_g=3.83 eV olan nümunənin tablanması 400°C-də aparılmışdır. Tablanmadan sonra nümunənin strukturu və E_g qiyməti dəyişmişdir. Səbəb temperatur artdıqca kristallitlərin ölçülərinin və qəfəs daxili məsafənin dəyişməsidir. E_g-nin dəyişməsi təbəqədə defekt strukturlardan, tərkibdən, qəfəsdaxili və kristallit xassələrdən asılıdır. Böyük E_g qiymətinə malik nümunələr günəş batareyalarında istifadə oluna bilər [21].

SEM təsvirlərində 80 dövrdə sintez edilmiş ZnS nazik təbəqələri hamar səthə malikdir. Element analizindən nisbət 1:1-ə yaxın, E_g-nin isə 3.55 eV-a bərabər olduğu müəyyən edilmişdir. Ədəbiyyatla müqayisədə heksoqonal stukturlu ZnS üçün E_g=3.5-3.7, kubik quruluşlu ZnS üçün E_g=3.7-3.9 eV-dur. Deməli, formalaşan ZnS nazik təbəqəsi kubik quruluşa malikdir.

Dövrələrin sayı dəyişdikdə E_g kiçik diapazonda dəyişmişdir (3.8-4.0 eV). Dövrələrin sayı artdıqca udulma artmış, E_g azalmış, güc çevirmə effektivliyi dəyişmişdir. Bu günəş batareyalarının effektivliyinə təsir göstərir. Nəticələr göstərdi ki, dövrələrin sayının dəyişdirilməsi fotovoltaiq batareyaların xassələrini yaxşılaşdırmışdır. Belə ki, say 6 olduqda yüksək effektivlik

müşahidə edilmişdir (3.25%). Fərz edilir ki, dövrlərin sayı artdıqca qalınlıq artmış, bununla elektron-deşik rekombinasiyası azalmış və maksimal dəyər göstərilmişdir. Dövrlərin sayının sonrakı artımında qiymət azalmışdır. SEM-ə əsasən dövrlərin sayının artması ilə hissəciklərin ölçüsü və təbəqənin qalınlığı artmışdır. Dövrlərin sayı günəş batareyalarının iş səmərəliliyinə təsir edir.

Adi şəraitdə və 100°C; 150°C; 200°C; 250°C-də tablamış ZnS birləşməsində E_g uyğun olaraq 3.66 eV, 3.57 eV, 3.50 eV, 3.48 eV kimi azalmışdır. Otaq temperaturunda alınmış təbəqədə $E_g=3.74$ eV olmuşdur. Deməli, tablamadan sonra E_g azalır. Sındırma əmsalı otaq temperaturunda 2.16, tablama temperaturu 100°C, 150°C, 200°C, 250°C olduqda, uyğun olaraq 2.17; 2.15; 2.14; 2.12 olaraq hesablanmışdır. Tablanmış təbəqələrin elektrik xassələri otaq temperaturunda alınmış nümunələrin elektrik xassələrindən daha davamlıdır. Temperaturun artması ilə cərəyan azalmışdır. Məlumdur ki, müqavimət və cərəyan temperaturdan asılı olan funksiya şəklindədir. Temperatur artdıqca cərəyan azalmış və təbəqənin müqaviməti artmışdır.

Udulma spektrinin nəticələrindən E_g -nin qiyməti 3.92 eV olaraq hesablanmışdır. Elektrik xassələrinə əsasən işığın intensivliyi artdıqca cərəyan artmışdır. Tablanmış ZnS təbəqəsində cərəyanın qiyməti alınmış ZnS-in cərəyan qiymətindən kiçikdir. Tablama 400°C-də aparılmış və optimal tablama müddəti 3 dəqiqə olmuşdur. Təbəqələrin strukturu 400°C-dən sonra dağılmışdır. Temperatur artdıqca nümunələrin kristallıq dərəcəsi artmışdır. Tablama temperaturu artdıqda E_g azalmışdır. Bu yarımkeçiricilərin xarakterik xüsusiyyətlərindəndir ($T=200^\circ\text{C}$ -də $E_g=3.84$; $T=300^\circ\text{C}$ -də $E_g=3.67$; $T=400^\circ\text{C}$ -də $E_g=3.47$). SEM-ə əsasən ZnS təbəqəsində paylanma biricinsliyi zəifdir və kristalların ölçüləri böyükdür. Cərəyanın qiyməti 10^{-10} A olaraq təyin edilmişdir. Tablanmış ZnS təbəqəsində cərəyan daha azdır. Temperatur artdıqca həssaslıq azalmış, işığın intensivliyi artdıqca həssaslıq artmışdır [22].

Müxtəlif dövrlərdə (50, 100, 150) şüşə altlıqda formalaşdırılmış ZnS nazik təbəqəsində $E_g=3.5$ eV-a yaxın qiymətlər almışdır [23]. Dövrlərin sayı 20, 40, 60, 80 artdıqca şüşə altlıqda alınmış ZnS nazik təbəqəsində E_g -nin qiyməti 3.42 eV; 3.41 eV; 3.40 eV; 3.38 eV-a qədər azalmışdır. E_g -nin azalması dövrlərin sayı artdıqca, kristallit ölçülərinin artması nəticəsindədir [24].

Kation mənbəyinin konsentrasiyasını sabit saxlamaqla, sulfur ionunun 5 müxtəlif konsentrasiyasında ZnS təbəqəsini sintez etdikdə, S/Zn nisbəti artmış, E_g -nin qiyməti 3.0 eV-dan 3.75 eV-a qədər dəyişmiş, fotoluminisensiya spektrlərində emissiya intensivliyi azalmışdır. Bu nümunədəki defekt strukturların iştirakının azalması ilə izah olunur [25].

Təbəqənin qalınlığı 35 nm, 136 nm olduqda, sındırma əmsalının qiyməti

məti uyğun olaraq, 1.63, 2.17 olmuşdur. Kristallıq dərəcəsi artdıqda sındırma əmsalının qiyməti də artmışdır [26].

Polikorbanat altlıqda formalaşan ZnS nazik təbəqəsində Zn və S-in atom faizi uyğun olaraq 42% və 36% olmuşdur. Polivinilxlorid altlıqda bu faiz 40% və 43%-dir. Bu iki elementin bir-birinə nisbəti 1:0.9-dur. SEM-ə əsasən səth hamar və hissəciklər ardıcıl yerləşmişdir. Hər iki altlıqda təbəqənin qalınlığı 50-70 nm intervalındadır [27].

Yetişmə prosesinin sürəti 0.16 nm/dövr olmuşdur. İlk reagentlərin miqdarını eyni qədər artırmaqla prosesin sürətinin 0.22 nm/dövr və 0.30 nm/dövr olduğu təyin edilmişdir. Dövrələrin sayı 500 olduqda qalınlıq dəyişmir. Rentgenə əsasən polisterdə formalaşdırılmış ZnS təbəqəsi amorf quruluşa malikdir. Qalınlıq 250 nm olduqda, kristallıq müşahidə edilmişdir. Element analizindən faiz nisbəti 1.05-1.23-ə kimi dəyişir. SEM təsvirlərindən səthin hamar olduğu müəyyən edilmişdir. ZnS üçün $E_g=3.44$ eV olaraq hesablanmışdır.

Həllədiçi TEA olduqda yetişmə sürəti 0.13 nm/dövr, etilenediamin olduqda 0.27 nm/dövr olmuşdur. İndium qalay oksidi üzərində $ZnCl_2/TEA$ sisteminin yetişmə sürəti 0.13 nm/dövr, $ZnCl_2/EN$ sistemi üçün 0.19 nm/dövrdir. Sındırma əmsalı 1.95-dən 2.23-ə qədər, yığılma sıxlığı 72%-dən 90%-ə kimi dəyişmişdir. Ən yüksək sındırma əmsalı və yığılma sıxlığı indium qalay oksid üzərində sink xloridin trietanolamində həll edilmiş kompleksindən istifadə edildikdə müşahidə olunur. Zn və S elementlərinin bir-birinə olan nisbəti 0.89-dan 1.08-ə kimi dəyişir. Rentgenə əsasən təbəqələr polikristallıq və kubik quruluşa malikdir.

SİLAR optoelektronika cihazlarının tətbiqində və optoelektronika çevirmə effektivliyinə görə daha effektiv üsul hesab olunur. ZnS təbəqələrinin qalınlığı artdıqca ZnS təbəqələrinin gərilməsi azalmışdır. SEM təsvirlərindən hissəciklərin nanoölçüdə olduğu müəyyən edilmişdir. Müxtəlif qalınlıqda Zn və S elementlərinin atom faiz nisbəti (330 nm-də 0.99, 440 nm-də 0.98, 550 nm-də 0.97) tədqiq edilmişdir. Qalınlıq artdıqda E_g , elektrik müqaviməti, Zn və S elementlərinin atom faiz nisbəti azalmış, yükdaşıyıcıların konsentrasiyası və yüüklüyü artmışdır [28].

SEM təsvirlərindən dövrlərin sayının artdıqda (20, 40, 60) hissəciklərin ölçüləri 77 nm, 100 nm, 124 nm və E_g 3.76 eV; 3.72 eV; 3.67 eV olmuşdur. Ölçülərin böyüməsi hissəciklərin aqlomerasiyası nəticəsində meydana gəlmişdir.

$Cd_xZn_{1-x}S$ üçlü birləşməsi hər iki birləşmənin xassələrini özündə cəmləyir. Birləşmə aralıq mövqedə olduğundan sintez olunan kombinasiyadan asılı olaraq müxtəlif xassələr göstərə bilər. Müxtəlif tərkibdə sintez olunan $Cd_xZn_{1-x}S$ nazik təbəqəsində molekullar arasındakı rabitə uzunluğu tərkibdən asılı olaraq dəyişmişdir. Cd-S üçün molekularası rabitə uzunluğu

2.52 Å, Zn-S üçün 2.34 Å-dir. Üçlü birləşmədə rabitə uzunluğu bu intervalda dəyişir. Absorbsiya əmsalı və foton enerjisinin spektral asılılığı Urbax empirik qanunu ilə təyin edilir. $Cd_xZn_{1-x}S$ nazik təbəqəsinin udulma spektrinə əsasən nümunələrin Urbax enerjisi hesablanmışdır. Nisbətə dəyişməsinə asılı olaraq Urbax enerjisinin qiyməti dəyişmişdir. $Cd_xZn_{1-x}S$ nazik təbəqəsində $x=0.2$; 0.4 ; 0.6 ; 0.8 olduqda uyğun olaraq $E_g=1.74$ eV; 1.96 eV; 1.90 eV; 1.82 eV-dur [29].

x -in qiymətindən asılı olaraq və Cd/Zn nisbətində əsasən müxtəlif birləşmələr alınmışdır və xassələri tədqiq edilmişdir. Bu sistemlərdə maksimum fotovoltaiq artım x -in $1,0$ -dan $0,62$ - $0,67$ -yə (280 mV) enməsi ilə müşahidə olunur. $Cd_xZn_{1-x}S$ nanokristallarında Zn (II) molar fraksiyasının artması ilə keçiricilik zolağı potensialının artımına (220 mV) səbəb olur. İndium qalay oksid/ZnO/ $Cd_xZn_{1-x}S$ təbəqələrini ağ işıqla işıqlandırdıqda yaratdığı fotoselin sıxlığı $1,0$ -dan $0,62$ - $0,67$ -yə düşən Cd (II) fraksiya ilə $Cd_xZn_{1-x}S$ nanokristallarının keçirici zolaq potensialının müvafiq artırılması ilə dörd dəfə artır. Deməli, kadmium sulfidə müqayisədə $Cd_xZn_{1-x}S$ spektral həssaslıq aralığının daralmasına baxmayaraq kadmium-sink sulfid qatı məhlullarına əsaslanan sistemlərdə fotoaktivlikdə xeyli qazanc alınabilir. Nəticələrə əsasən $Cd_xZn_{1-x}S$ qatı məhlulları, günəş batareyalarının həssaslıq dərəcəsi (400 - 450 nm) qısa dalğa uzunluqlu hissəsi üçün şərti olaraq istifadə olunan kadmium sulfiddən daha sərfəli materiallardır [30]. İndium qalay oksid/sink oksid/ $Cd_xZn_{1-x}S$ heterostrukturunda $Cd_xZn_{1-x}S$ birləşməsi Cd(II) hissəciyinin və məhlulda kadmium və sink nisbətində əsasən SİLAR-la sintez edilmişdir. Məqsəd bu tip strukturlarla fotoelektrokimyəvi aktivliyi artırmaqdır. x -in qiyməti artdıqda E_g 2.69 eV-dan 2.40 eV-a qədər azalmışdır.

$Cd_{1-x}Zn_xS$ nanohissəciyi $x=3\%$ qiymətində sintez edildikdə $E_g=7,6$ eV olaraq hesablanmışdır. Cd, Zn və S-in element faiz nisbəti uyğun olaraq, 47.27% , 1.61% və 51.12% olmuşdur [31].

CdS nazik təbəqəsinə Zn ionlarını aşqarlamaqla, $Cd_xZn_{1-x}S$ təbəqəsi sintez edilmiş, Zn ionlarının konsentrasiyası artdıqda mavi sürüşmə baş vermişdir. Zn ionları artdıqda müqavimət azalmış, keçiricilik və Hall mobilliyi artmışdır. Zn ionunun 6% qiymətində yüksək daşıyıcı konsentrasiya, yüksək keçiricilik və kiçik müqavimət müşahidə olunmuşdur. Nümunələr 1 saat müddətində $200^\circ C$ -də havada təblənmişdir. Optik ölçmələrə əsasən Zn ionunun konsentrasiyası (0.006) artdıqda, E_g artmış və maksimum qiyməti 2.66 eV olmuşdur. Konsentrasiyanın 0.009 qiymətində E_g azalmışdır (2.5 eV). CdS təbəqələrini Zn elementilə aşqarlamaqla E_g -nin artması, kristallitlərin ölçülərinin azalması ilə yükdaşıyıcıların kvant ölçülü effekti hadisəsinə əsaslanır. Bu formalaşmış materialın quruluşunun və stexiometrik tərkibinin orientasiyasına səbəb ola bilər [10].

Parametrlərin dəyişdirilməsilə şüşə altlıqda $Cd_xZn_{1-x}S$ birləşməsində

E_g -nin dəyişməsi analiz edilmişdir. Burada iki fərqli cüt mənbələrdən istifadə olunmuşdur. İlkin olaraq, reagentlərin müxtəlif konsentrasiyalı məhlulları üçün E_g 2.4 eV-3.5 eV intervalında dəyişmişdir. Belə birləşmələr günəş batareyalarında və optoelektronika cihazları üçün tətbiqdə ideal materiallardır. Qiymətin sonrakı dəyişmələri üçün ilkin reagentin bir-birinə nisbəti dəyişdirilmişdir.

Cihazların effektivliyini artırmaq üçün üçlü birləşmə $TiO_2/Cd_xZn_{x-1}S/ZnS$ tərkibli quruluş şəklində sintez olunmuşdur. Bu birləşmə TiO_2 -lə kvant nöqtələri arasında passivasiya effekti yaradırlar. Bu təsir cihazdakı elektron-deşik cütlərinin rekombinasiya dərəcəsini azaldır. Çevirmə effektivliyinin artırılması üçün quruluşların müxtəlif növləri alınmış və tədqiq edilmişdir. Üçlü birləşmələrin günəş batareyalarına daxil edilməsi onların effektivliyini artırmaqla nəticələnmişdir. $TiO_2/Cd_{0.75}Zn_{0.25}S_1/ZnS$ konfigurasiyalı materialların çevirmə effektivliyi 3.6% olmuşdur. Çevirmə effektivliyindəki artım, açıq dövrəli gərginliyin 0,517 V-dan 0,725 V-dək artması ilə əlaqələndirilir. Müvafiq fotocərəyan sıxlığı 12.1566 mA/sm²-dən 11.66mA/cm²-ə endirilmişdir. Effektivliyin bu cür artması CdZnS üçlü birləşməsinin səthdə passivasiya effektini yaratması ilə bağlıdır. Nəhayət, nisbətən yüksək toksikliyə malik olan $TiO_2/CdS/ZnS$ konfigurasiyasına malik cihazların toksikliyi azaldaraq çevirmə effektivliyini artıran $Cd_xZn_{x-1}S$ kvant nöqtələrinin tətbiqi ilə dəyişdirilə biləcəyi göstərilmişdir. Element analizindən kadmiumun atom faizi 21.3%, sink üçün 4.9%, sulfid üçün 8.8% olmuşdur. $Cd_{0.5}Zn_{0.5}S$ və $Cd_{0.25}Zn_{0.75}S$ birləşmələrində Zn ionlarının miqdarının artması uyğun olaraq, birləşmələrdə kadmiumun 50% və 75% azalması deməkdir. $TiO_2/Cd_1Zn_0S/ZnS$ birləşməsində $E_g=2.15$ eV, $TiO_2/Cd_{0.75}Zn_{0.25}S/ZnS$ birləşməsində $E_g=2.3$ eV, $TiO_2/Cd_{0.5}Zn_{0.5}S/ZnS$ birləşməsində $E_g=2.5$ eV, $TiO_2/Cd_{0.25}Zn_{0.75}S/ZnS$ birləşməsində $E_g=2.75$ eV, $TiO_2/Cd_0Zn_1S/ZnS$ birləşməsində $E_g=3.2$ eV olaraq hesablanmışdır [32].

NƏTİCƏ

Dövrələrin sayının artması təbəqələrin qalınlığının və ya hissəciklərin ölçülərinin artmasına səbəb olur. Bu E_g -nin kiçilməsinə gətirir. Yuxarıda göstərilən nəticələri Brus bərabərliyinə əsasən izah etmək olar. Dövrələrin sayı artdıqda diffuz sındırma əmsalının qiyməti azalır. Temperatur artdıqca kristallaşma sürətinin artması, hissəciklərin koalesensiya proseslərinin sürətlənməsi və kiçik hissəciklərin böyük hissəciklər tərəfindən udulma prosesinin sürətlənməsi baş verir. Bu faktorların nəticəsində hissəciklərin ölçüləri daha artır. Temperaturun təsiri nəticəsində yetişmə prosesi daha yaxşı gedir. Dövrələrin sayı artdıqda hissəciklərin ölçüləri də artır və E_g -nin qiyməti azalır. $Cd_xZn_{1-x}S$ birləşməsində x-in qiyməti artdıqda E_g azalır. Yəni, Cd^{2+} ionunun miqdarı artır və $Cd_xZn_{1-x}S$ birləşməsində E_g qiyməti CdS birləşmə-

sinin E_g -nin qiymətinə yaxınlaşır. Ədəbiyyat analizi göstərir ki, formalaşan nümunələrin sındırma əmsalı, E_g , müqaviməti tablama temperaturundan asılıdır. Bu tablama zamanı nümunələrin kristallik strukturu, struktur defektləri və ölçülərin dəyişməsilə bağlıdır.

ƏDƏBİYYAT

1. Oral A.Y., Bahsi Z.B., Oral M.O., Properties of CdS Deposited by the SILAR Method Using Cd(II) Organic Salt as Precursor // Editors 2nd International Congress on Energy Efficiency and Energy Related Materials, –2014, –p.16–19.
2. Kundakçı M. Characterization of $In_{1-x}Cd_xS$, In_2S_3 and CdS thin films grown by SILAR method / M.Kundakçı, J.Mater // Sci J Mater Sci: Mater Electron, – 2017.28, – p.5807–5816.
3. Sasagawa M. Effect of Cadmium Precursor Solutions on Fabrication of CdS Thin Films by Successive Ionic Layer Adsorption and Reaction (SILAR) Technique / M.Sasagawa, J.Nishino, Y. Nosaka // Successive Electrochemistry, –1999.67, №12, –p.1237-1239.
4. Manikandan K. Effect of molar concentration on structural morphological and optical properties of CdS thin films obtained by SILAR method / K.Manikandan, 142 J.T.Dominic // Indian journal of pure & applied physics, –2014. 52, –p.354-359.
5. Guzeldira B. Deposition and Characterization of CdS, CuS and ZnS Thin Films Deposited by SILAR Method / B. Guzeldira, M.Saglana, A.Atesb [et al.] // Acta physica polonica A, – 2012.121, №1, – p.33-35.
6. Azizian K. Y. Growth process and investigation of some physical properties of CdS nanocrystals formed in polymer matrix by successive ionic layer adsorption and reaction (SILAR) method / K.Y.Azizian, M.B.Muradova, R.K.Mammedova [et al.] // Journal of Crystal Growth, – 2007.305, – p.175–180.
7. Ravichandrana K. Addressing the issue of under-utilization of precursor material in SILAR process: Simultaneous preparation of CdS in two different forms – Thin film and powder / K.Ravichandrana, S.Porkodia // Materials Science in Semiconductor Processing, –2018.81, –p. 30–37.
8. Dariani R.S. Structural and optical studies of CdS and CdS:Ag nano needles prepared by a SILAR method / R.S.Dariani, Z.Emami // Journal of Ceramics International, – 2015. 41, –p. 8820-8827.
9. Dipalee J. Effect of annealing on structural and optoelectronic properties of CdS thin film by SILAR method / J.Dipalee, S.Shaeed, B.Ravikiran [et al.] // Advances in Applied Science Research, –2011.2 (4), –p.417–425.
10. Pradhabhan D. Optical, structural and electrical properties of silar deposited zinc doped cadmium sulphide thinfilms / D.Pradhabhan, A.Sakthivelu // International journal of Research and Analytical Reviews, –2019.6(2), – p.387-393.
11. Myeong–Soo J. Study on characteristics of CdS quantum dot–sensitized solar cells prepared by successive ionic layer adsorption and reaction with different adsorption times / J.Myeong–Soo, S.Min–Kyu, K.Soo–Kyoung [et al.] // Electronic Materials Letters, – 2014.10, – p.621-626.
12. Rosiles–Pereza C. Improved performance of CdS quantum dot sensitized solar cell by solvent modified SILAR approach / C.Rosiles–Pereza, A.Cerdán– Pasarána, S.Sidhika [et al.] // Solar Energy, –2018.174, –p.240–247.
13. Zhou R. Influence of cationic precursors on CdS quantum–dot–sensitized solar cell prepared by successive ionic layer adsorption and reaction / R.Zhou, Z.Qifeng, T.Jianjun [et al.] // Journal of Physical Chemistry, –2013.117, –p.26948–26956.

14. Sankapal B.R. Deposition of CdS thin films by the successive ionic layer adsorption and reaction (SILAR) method / B.R.Sankapal, R.S.Mane, C.D.Lokhande // *Materials Research Bulletin*, – 2000.35, –p.177–184.
15. Senthamilselvi V. Photovoltaic properties of nanocrystalline CdS films deposited by SILAR and CBD techniques a comparative study / V.Senthamilselvi, K.Saravanakumar, N.J. Begum [et al.] // *J.Mater Sci: Mater Electron*, –2012.23, –p.302–308.
16. Raid A., Effect of Time Immersion of Thiourea on Structural and Optical Properties of CdS Deposited by SILAR / A.Raid, F.Nadir, Y.Kameran [et al.] // *World Scientific News*, –2018 .91, – p.73–85.
17. Ubale A.U. Characterization of nanostructured photosensitive cadmium sulphide thin films grown by SILAR deposition technique / A.U.Ubale, A.N.Bargal // *Indian Journal of Physics*, –2010.84, –p.1497–1507.
18. Sun H. Thin Films on Glass Substrates Modified with 3–Mercaptopropyltrimethoxysilane / H.Sun, J.Mu // *Journal of Dispersion Science and Technology*, –2005.26, – p.719–722.
19. Method Rasin A. Size–dependent photodegradation of CdS particles deposited onto TiO₂ mesoporous films by SILAR / A.Method Rasin, W.Geoffrey, B.John // *Journal of Nanoparticle Research*, –2012.14(9), – p. 1–13.
20. Oguzhan O. Influence of film thickness on structural and optical properties of ZnS 145 thin films obtained by SILAR method and analysis of Zn/ZnS/n–GaAs/In sandwich structure / O.Oguzhan, G.Betul, M.A.Yıldırım [et al.] // *Ates Phys. Status Solidi A*, – 2012. 209, №4, –p.687–693.
21. Method A. Morphology, structural and optical study of ZnS thin films prepared by Successive Ionic Layer Adsorption and Reaction (SILAR) / A.Method, M.Djelloul, Y.Adnane [et al.] // *Journal of Optoelectronics and advanced materials*, –2016.18, – p.136–141.
22. Yıldırım M.A. Annealing and light effect on structural, optical and electrical properties of CuS, CuZnS and ZnS thin films grown by the SILAR method / M.A.Yıldırım, A.Aytunc, A.Aykut [et al.] // *Physica E : Low-dimensional Systems and Nanostructures*, –2009.41, – p.1365–1372.
23. Ashith V.K., Gowrish R.K. Structural and optical properties of ZnS thin films by SILAR technique obtained by acetate precursor // *Conference Series: Science and Engineering*, – Sarawak, 16-18 July, – 2018, – p.1-6.
24. Deshmukh S.G. Structural and optical properties of nanocrystalline ZnS thin films grown by successive ionic layer adsorption and reaction method / .G.Deshmukh, S.P.Kulkarni, A.I.Nikam [et al.] // *International Journal of Research in Computer Science and Information Technology*, –2016.1, – p.167-170.
25. Mohaideen H.M. The studies on optical and structural properties of zinc sulfide thin films deposited by SILAR method / H.M.Mohaideen, K.Saravanakumar, S.S.Fareed [et al.] // *Journal of Chemical and Pharmaceutical Research*, – 2015.7(10S), – p.141- 145.
26. Laukaitis G. Stress and surface studies of SILAR grown ZnS thin films on (100) GaAs substrates / G.Laukaitis, S.Lindroos, S.Tamulevicius [et al.] // *Materials Science and Engineering* , –2000, –p. 223–230.
27. Lindroos S. Zinc sulfide thin films grown by SILAR on poly (vinyl chloride) and polycarbonate substrates / S.Lindroos, T.Kanniainen, M.J.Leskela // *Journal of Materials Chemistry*, – 1996.6(9), – p.1497–1500.
28. Priya K., A comparative study of structural, optical and electrical properties of ZnS thin films obtained by thermal evaporation and SILAR techniques / K.Priya, V.K.Ashith, G.K.Rao // *J. Ceramics International*, –2017.43(13), – p.10487– 10493.

29. Ashith V.K. Effect of composition on SILAR deposited $Cd_xZn_{1-x}S$ thin films / V.K.Ashith, R.K.Gowrish, // Citation: AIP Conference Proceedings 1942, – 2018. 1, – p.1-4.
30. Kozytzkiy.A. Morphology, optical, and photoelectrochemical properties of electrodeposited nanocrystalline ZnO films sensitized with $Cd_xZn_{1-x}S$ nanoparticles / A. Kozytzkiy, O.L.Stroyuk, S.Kuchmiy [et al.] // Article in Journal of Materials Science, – 2013, –p.1-11.
31. Ekinici, A. Effect of mo doping on the photovoltaic properties of mo doped $Cd_{1-x}Zn_xS$ ($x= 3 \%$) quantum dots synthesized by silar / A.Ekinici, O.Sahin, S.Horoz // Journal of Non Oxide Glasses, – 2018.10, №3, – p. 71 – 76.
32. Omar E.S. Synthesis of Alloyed $Cd_xZn_{1-x}S$ quantum dots for photovoltaic applications / E.S. Omar, M.R. Jesus, T. Lopez–Luke [et al.] // Journal of photovoltaics, solis., – 2020.–p.1-10.

ФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА НАНОМАТЕРИАЛОВ $Cd_xZn_{1-x}S$ ПО МЕТОДУ SILAR

М.Б.МУРАДОВ, Г.М.ЭЙВАЗОВА, Л.Р.ГАХРАМАНЛЫ

РЕЗЮМЕ

Технологические условия и параметры реакции влияют на физические свойства полупроводниковых материалов $Cd_xZn_{1-x}S$. В настоящем исследовании изучена взаимосвязь между физическими свойствами этих соединений, полученных методом синтеза SILAR, и параметрами реакции.

Ключевые слова: наноматериалы $Cd_xZn_{1-x}S$, ширина запрещенной зоны, физические свойства.

PHYSICAL PROPERTIES OF $Cd_xZn_{1-x}S$ NANOMATERIALS BY SILAR METHOD

M.B.MURADOV, G.M.EYVAZOVA, L.R.GAHRAMANLI

SUMMARY

The technological condition and reaction parameters are affected to the physical properties of $Cd_xZn_{1-x}S$ semiconductor materials. In the present study, the relationship between the physical properties of these compounds obtained by the SILAR synthesis method and the reaction parameters was investigated.

Keywords: $Cd_xZn_{1-x}S$ nanomaterials, bandgap, physical properties.

UOT 621.38

Cu₃In₅S₉ MONOKRİSTALINDA AŞQAR UDMA

L.H.HƏSƏNOVA, Ə.Z.MƏHƏMMƏDOV

*Bakı Dövlət Universiteti**ludmilahasanova@mail.ru*

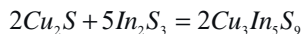
Mürəkkəb yarımkeçirici birləşmə Cu₃In₅S₉ monokristalında aşqar udma öyrənilmişdir. Baxılan kristal, analoqu olduğu A₂^{III}B₃^{VI} kristalları kimi, defekt quruluşudur, kristaldakı defektlər yüksək konsentrasiyaya malik olduğundan, qadağan olunmuş zonada müəyyən səviyyələr yaradır, onlar da rekombinasiya prosesində güclü təsir etdiyindən yarımkeçiricinin fotokeçiriciliyində və fotoluminissensiyasında mühüm rol oynayır.

Açar sözlər: aşqarlar, defektlər, optik udma.

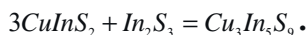
Almazabənzər yarımkeçiricilər bir sıra fiziki xassələrinə, yükdaşıyıcıların, yürüklüyün böyük olmasına, həmçinin fotoelektrik və termoelektrik xassələrinə görə tədqiqatçıların diqqətini cəlb edir. Sfalerit və vürsit tipli normal struktura malik yarımkeçirici birləşmələrlə yanaşı defekt quruluşlu yarımkeçirici birləşmələrin öyrənilməsinə də böyük diqqət yetirilir. Belə yarımkeçirici birləşmələrdən biri də A₃^IB₅^{III}C₉^{VI} tip maddələrdir [1].

Baxılan işdə Cu₃In₅S₉ birləşməsində aşqar udma öyrənilmişdir. Birləşmə ona görə maraq kəsb edir ki, xalkogen atomları böyük olduğundan həmişə n-tip keçiriciliyə malik olur, günəş spektri diapazonunda böyük udma əmsalına malikdir ki, bu da Cu₃In₅S₉ nümunələrinin üzərinə düşən günəş şüalarının udulmasını əlverişli edir. Bundan başqa defektlərin konsentrasiyasının böyüklüyü kristalın yüksək radiasiya dözümlülyünə səbəb olur.

Cu₃In₅S₉ kristalının əmələ gəlməsini aşağıdakı reaksiyalarla təsvir etmək olar:



və ya

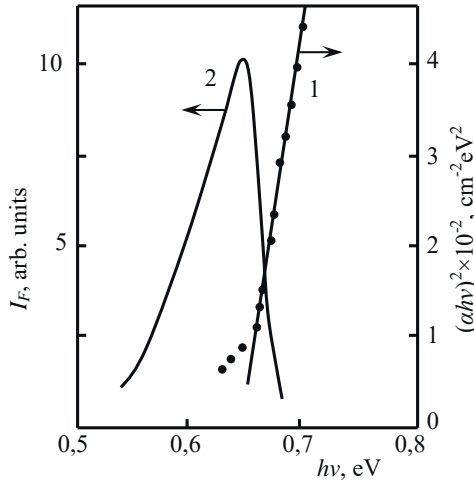


Adətən, ikiqat və üçqat xalkogenid birləşmələrin sintezi zamanı onlar asan uçucu komponentlərə malik olduğundan sintez olunan ampulanın

daxilində böyük buxar təzyiqi yaranır və təzyiqi azaltmaq üçün ampulanın soyudulduğu xüsusi sobalardan istifadə olunur.

İstifadə olunan monokristallar isə yavaş soyutma üsulu ilə göyərdilmişdir. Bu üsulun üstünlüyü ondan ibarətdir ki, baxılan halda nə soba, nə də ampula hərəkət etmir və göyərmə prosesində ampulanın mexaniki silkələnməsinin qarşısı alınır, dəyişən yalnız sobanı qidalandıran cərəyan olur. Baxılan üsulla iri, təkmil metallik parlıtuya və layvari quruluşa malik $Cu_3In_5S_9$ monokristalları alınmışdır, o monoklin struktura malik olub, parametrləri $a=6,60$; $b=6,96$; $c=8,12 \text{ \AA}$; $\beta=89^\circ$; $z=1$.

$Cu_3In_5S_9$ monokristalında aşqar udma $0,8 \div 1,5 \text{ mkm}$ oblastda tədqiq olunmuşdur. Udma əmsalı müxtəlif qalınlıqlı nümunələrdə şəffaflığı ölçməklə təyin olunmuşdur. Maddə layvari olduğundan eyni nümunədən ardıcıl qopartma üsulu ilə müxtəlif qalınlıqları almaq olar. Baxılan oblastda aşqar udma müşahidə olunur (şəkil 1). Təcrübi nəticələr $\alpha \sim (h\nu - E_g + E_D)^{1/2}$ asılılığına əsasən araşdırılmışdır.



Şəkil 1. $Cu_3In_5S_9$ monokristalında aşqar udmanın (1 əyrisi) və aşqar fotoluminenssiyanın (2 əyrisi) enerjidən asılılığı.

Belə ki, [2] işində göstərilmişdir ki, elektronların valent zonasından boş donor səviyyəsinə keçid aşağıdakı düsturla xarakterizə olunur:

$$\alpha = A \frac{N_D}{1 + \exp\left(\frac{E_F - E_D}{kT}\right)} \cdot \frac{(h\nu - E_g - E_D)^{1/2}}{h\nu}.$$

Bu ifadə keçirici zona parabolik quruluşa, $m_n \gg m_p$ və E_F Fermi səviyyəsi E_D ətrafında yerləşdiyi halda doğrudur. A – sabit, N_D – donor aşqarların konsentrasiyasıdır.

Verilmiş düsturdan görünür ki, enerji şkalasında udmanı qabaqlayan aşqar udmanın enerjiden asılılığı icazə verilmiş zonalararası məxsusi düz keçidlərdə olduğu kimidir. Lakin aşqar udma halında udma əmsalı məxsusi udma halındakına nisbətən xeyli kiçikdir. Udma spektrində alınmış xəttin absis oxuna qədər ekstrapolyasiyasından 0,65 eV qiyməti alınmışdır. Aşqar udma temperaturdan çox asılı olur. Bu xüsusiyyətini araşdırmaq üçün nümunələr ölçmələrdən əvvəl 77 K temperaturlarda qaranlıqda saxlanılmışdır. Bu halda praktiki olaraq aşqar udma müşahidə olunmamışdır. Lakin nümunələri $h\nu \gg E_g$ enerjili işıqlandırdıqda aşqar udma müşahidə olunur və qaranlıqda saxlama müddəti artdıqca udma zəifləyir. Bu onunla izah olunur ki, qaranlıqda saxlanılmış nümunələrin qadağan olunmuş zolağının ortasına yaxın yerləşmiş aşqar səviyyələri 77 K-da, demək olar ki, boşdur. Müşahidə olunan hadisə həmin dalğa uzunluğunda $Cu_3In_5S_9$ monokristalında məcburi aşqar fotokeçiriciliyin, infraqırmızı sönmənin, temperatur sönməsinin müşahidə olunması faktı ilə uyğunlaşır [3].

Qeyd etmək lazımdır ki, $Cu_3In_5S_9$ monokristalının udma sərhəddində məxsusi lüminessensiya müşahidə olunmur, lakin 77 K temperaturda aşqar fotolüminessensiya müşahidə olunur və onun maksimumu 0,65 eV enerjiyə uyğundur. Beləliklə, aşqar udma və fotolüminessensiyanın tədqiqindən belə nəticəyə gəlmək olur ki, uzunluğunda $Cu_3In_5S_9$ monokristalında Fermi səviyyəsi ilə bağlı dərin aşqar səviyyəsi var. Bu səviyyə tədqiq olunan bütün nümunələrdə o göründüyündən, səviyyənin monokristalın strukturundakı defektlərlə əlaqədar olduğunu demək olar.

ƏDƏBİYYAT

1. Тагиров В.И., Гахраманов Н.Ф., Гусейнов А.Г. Новый класс тройных полупроводниковых соединений типа $A_3^I B_5^{III} C_9^{VI}$. - Баку, - 2001, - 303 с.
2. Уханов Ю.И. Оптические свойства полупроводников. - Москва: Наука, - 1977, - 360 с.
3. Həsənova L.H., Məhəmmədov Ə.Z., Cahangirova S.Ə. $Cu_3In_5S_9$ monokristalında fotokeçiriciliyin xüsusiyyətləri. Bakı Universitetinin xəbərləri, fizika-riyaziyyat elmləri seriyası, - 2019, - №3, - s. 156-159.

ПРИМЕСНОЕ ПОГЛОЩЕНИЕ В МОНОКРИСТАЛЛЕ $Cu_3In_5S_9$

Л.Г.ГАСАНОВА, А.З.МАГОМЕДОВ

РЕЗЮМЕ

Исследовано примесное поглощение в монокристалле сложного полупроводникового соединения $Cu_3In_5S_9$. Рассматриваемый кристалл, как и аналогичные ему кристаллы $A_2^{III}B_3^{VI}$, имеет дефектную структуру, и поскольку дефекты в кристалле имеют высокую концентрацию они создают в запрещенной зоне определенные уровни, играющие важную роль в фотопроводимости и фотолюминесценции полупроводника.

Ключевые слова: примеси, дефекты, оптическое поглощение.

IMPURITY ABSORPTION IN A $Cu_3In_5S_9$ SINGLE CRYSTAL

L.G. HASANOVA, A.Z. MAHAMMADOV

SUMMARY

Impurity absorption in a single crystal of a complex semiconductor compound $Cu_3In_5S_9$ has been studied. The crystal under consideration, like similar $A_2^{III}B_3^{VI}$ crystals, has a defect structure, and since the defects in the crystal are highly concentrated, they create certain levels in the band gap, which play an important role in the photoconductivity and photoluminescence of the semiconductor.

Keywords: impurities, defects, optical absorption

PACS: 25.75.Dw, 24.10.Nz

STUDY OF $ZH, H \rightarrow b\bar{b}$ EVENTS SELECTION CONDITIONS
USING DIFFERENT EVENT GENERATORSF.N.AHMADOV^{1,2}, M.A.MANASHOVA^{1,3}¹*Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, Russia*²*Institute of Physics of ANAS, Baku, Azerbaijan*³*The Institute of Nuclear Physics, Almaty, Kazakhstan*
fahmadox@jinr.ru, munira.manashova@mail.ru

In this paper, we analyze the process of associative production of the Higgs boson with the Z-boson and its main background processes ZZ and Zb \bar{b} at the level of event generation. Signal and background events are generated using the CompHEP, POWHEG and PYTHIA generators. The distributions of some kinematic variables for the signal process obtained from these three generators were compared. It was found that the shape of these distributions is similar for different generators. The slight deviation of the POWHEG distributions from other generators can be explained by the fact that it uses the next-to-leading order of perturbation theory for the cross section, while other generators use the leading order. Also, new spin-dependent angular variables for signal and background processes were defined and compared. The signal-to-background ratio can be significantly improved by cutting off the side region of the distribution of the angular variables, where the number of signal events decreases but the number of background events increases rapidly.

Keywords: Higgs boson, event generator, associative production.

Introduction

The Higgs boson was discovered in 2012 by the collaboration of ATLAS and CMS at the LHC [1, 2]. The measured mass of the Higgs boson produced in proton-proton collisions is about 125 GeV. The Standard Model Higgs boson is searched for at the LHC in various decay channels ($\gamma\gamma$, ZZ, WW, $\tau\tau$, $b\bar{b}$). The predominant decay of the Higgs boson in the SM occurs with a probability of $\sim 58\%$ for a pair of $b\bar{b}$ quarks [3]. The dominance of the background leads to difficulties in studying and describing the properties of the Higgs boson. The object of research in this work is the associated

production of the Higgs boson with the Z-boson. In associative production, angular variables of final particles are very useful for analysis. Z- and W-bosons do not differ in spin magnitude. The Higgs boson has spin 0, the Z boson has spin 1. Due to the difference in spin, there is a difference in the distribution of the angular variables. This effect can improve the signal-to-background ratio.

Samples and event simulation

Physics processes have been simulated with the PYTHIA [4], CompHEP [5], and POWHEG [6] Monte Carlo programs.

In this work latest version (v8) of the PYTHIA are used. Leading order (LO) corrections were used when generating events with the PYTHIA8, as in the CompHEP generator.

CompHEP is designed as a universal program for calculating collision and decay processes with up to 8 particles in the final state.

POWHEG is a method that uses the POWHEG BOX computing environment to implement next to leading order (NLO) perturbation theory computations.

In this study, $pp \rightarrow ZH \rightarrow llb\bar{b}$ was considered as a signal process, $p \rightarrow ZZ \rightarrow llb\bar{b}$ and $pp \rightarrow Zb\bar{b} \rightarrow llb\bar{b}$ as a background processes, where $l = e^\pm$ or μ^\pm . The energies of protons were set to 6.5 TeV. We use the same number of events and order of corrections as in [7] when generating signal and background samples. CTEQ611 was used as the structure function of the proton in the PYTHIA8 and CompHEP generators, and CTEQ6M was used in the POWHEG. The difference in the distribution of the transverse momentum for the $pp \rightarrow ZH \rightarrow llb\bar{b}$ process between LO and NLO event generators can be seen in Figure 1.

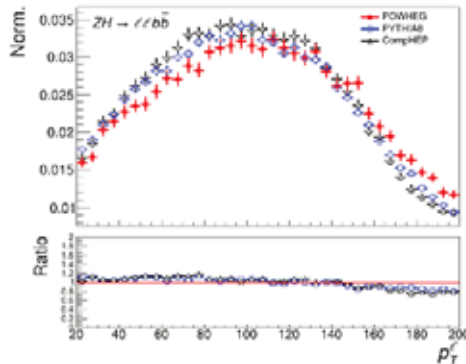


Fig. 1. Distribution of the transverse momentum of the lepton.

Bottom plot shows the distribution ratios PYTHIA8/POWHEG and CompHEP/POWHEG.

Events selection and analysis

Some selection conditions from the experimental analysis [8] were used in the present work.

- The transverse momentum p_T of leptons, b - and \bar{b} - quarks are required to be greater than 25 GeV.
- The pseudorapidity for final particles should be $|\eta| < 2.5$
- The transverse momentum of the Z boson must be greater than 150 GeV.

Figure 1 shows a comparison of the lepton's transverse momentum distributions for the signal process obtained from different generators. In this figure, the difference in distributions between the event generators can be explained by the fact that the generators use different corrections to calculate the cross section (LO or NLO).

We suggest to use two angular variables (θ_l , θ_Z) in order to improve background suppression. The variable θ_l is the angle of the negatively charged lepton in the Z rest frame relative to the Z direction in the $q\bar{q}$ center of mass system. θ_Z is the angle between the direction of the Z-boson and the colliding particles in the center of mass system in ZH. Figure 2 shows a comparison of the distributions of these angular variables.

Results

We compare the signal and background distributions over some variables for different event generators. This procedure was repeated for events simulated by the PYTHIA8 and CompHEP generators. These comparisons are presented in Figures 3 and 4.

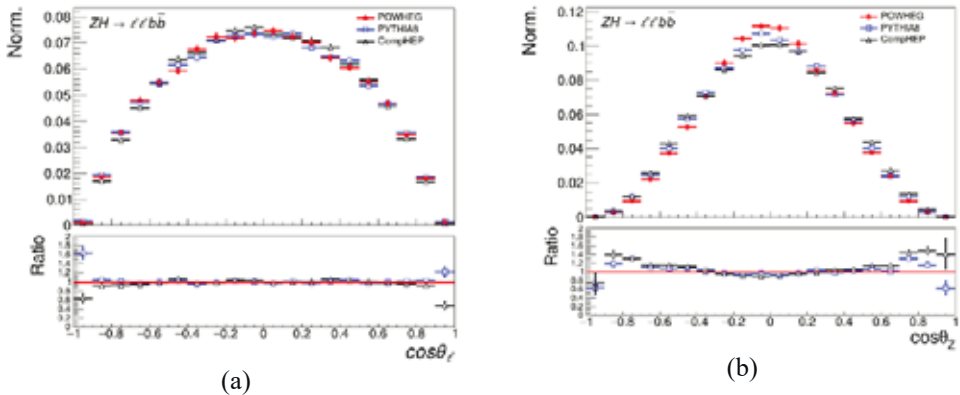


Fig. 2. Distribution of the cosine of the charged lepton (a) angle in the Z rest frame relative to the Z direction in the $q\bar{q}$ c.m.f. and (b) the cosine of the Z-boson polar angle from the collision axis in the $q\bar{q}$ c.m.f. for different generators.

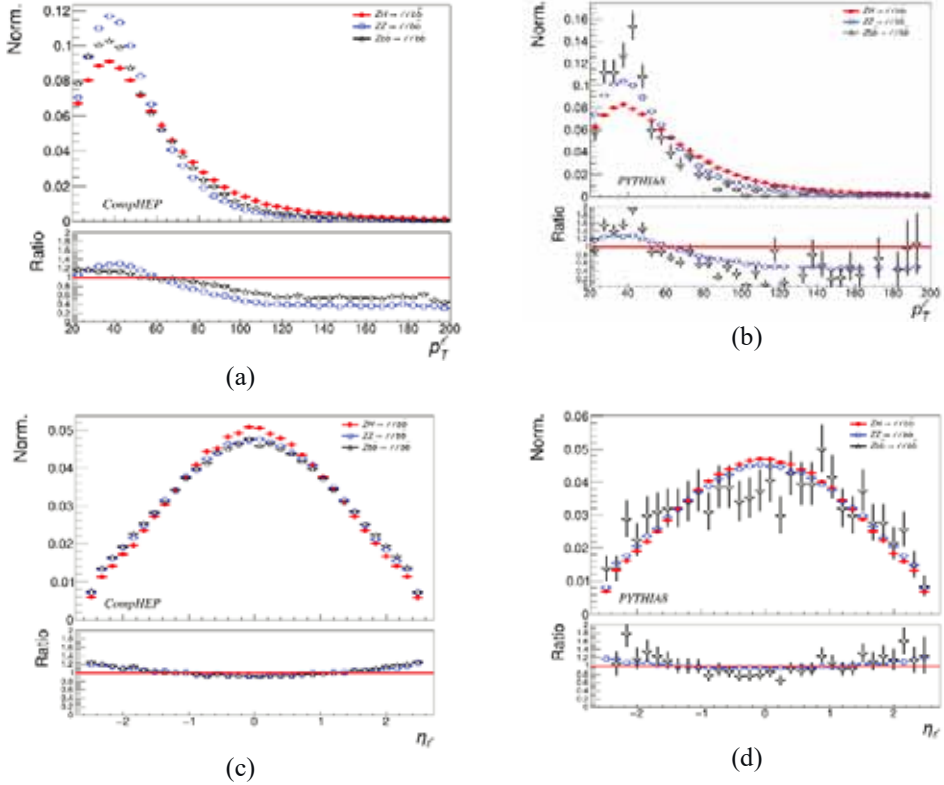


Fig. 3. Distributions of the transverse momentum and pseudorapidity of the charged lepton for signal and background processes obtained from CompHEP (a, c) and from PYTHIA8 (b, d).

Figure 3 shows the distributions of the transverse momentum and pseudorapidity of the charged lepton. In the Figure 4, the distributions on $\cos\theta_l$ and $\cos\theta_z$ are given. It can be seen from the distributions of the charged lepton pseudorapidity that the distribution for the signal does not differ much from the distribution for the background. Therefore, this variable is not useful to select signal events. From the Figure 4 one can conclude, that the selection requirements $-0.6 < \cos\theta_l < 0.6$ and $-0.7 < \cos\theta_z < 0.7$ could significantly improve the signal-to-background ratio. Unlike the WH process, in the ZH process all particles in the final state can be fully reconstructed in the detector. Therefore, despite the decrease in efficiency after the simulation and reconstruction of the process in the detector, these variables will remain effective for event selection. And the difference in distribution for different generators can be used as a systematic error in modeling this process.

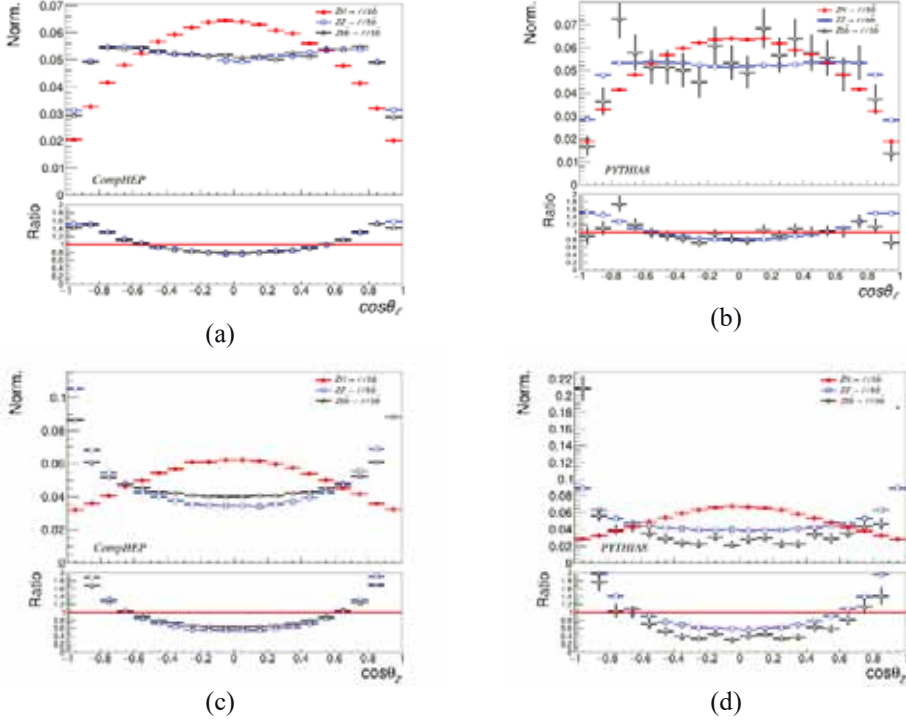


Fig. 4. Distributions of the cosine of the charged lepton angle in the Z rest frame relative to the Z direction in the $q\bar{q}$ c.m.f. and the cosine of the Z-boson polar angle from the collision axis in the $q\bar{q}$ c.m.f. for ZH, ZZ and $Zb\bar{b}$ events obtained from CompHEP (a, c) and from PYTHIA8 (b, d).

Conclusion

From figure 2 and 3, it can be seen that the forms of distributions of variables for different generators are similar. The slight difference between POWHEG and the other two generators can be explained by the difference in the level of corrections (NLO and LO) that are taken into account when generating an event. As can be seen from the results, there is a similarity between the distributions obtained from the CompHEP and PYTHIA8 generators. This similarity confirms the correctness of the event generation process and obtaining the distribution of variables and allows us to use these variables in the event selection process. Figure 4 illustrates that the distribution of variables for signal and background processes is quite different. These differences can be used in further analysis to reduce the large background contribution.

REFERENCES

1. ATLAS collaboration, Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC, Phys. Lett. B 716 (2012) 1 [arXiv:1207.7214] [INSPIRE].
2. CMS collaboration, Observation of a new boson at a mass of 125 GeV with the CMS experiment at the LHC, Phys. Lett. B 716 (2012) 30 [arXiv:1207.7235] [INSPIRE].
3. A.Djouadi, J. Kalinowski, M. Spira, HDECAY: a program for Higgs boson de-cays in the Standard Model and its supersymmetric extension, Comput. Phys. Commun. 108 (1998) 56, arXiv:hep-ph/9704448[hep-ph].
4. T.Sjostrand, P. Skands. PYTHIA 8.2 Worksheet, January 2015.
5. A.Pukhov, E. Boos, M. Dubinin, V. Edneral, V. Ilyin, D. Kovalenko, A. Kryukov, V. Savrin. CompHEP - a package for evaluation of Feynman diagrams and integration over multiparticle phase space. User's manual for version 33, 2000 [arXiv:hep-ph/9908288].
6. S.Frixione, P. Nason and C. Oleari. Matching NLO QCD computations with Parton Shower simulations: the POWHEG method, JHEP 11, 2007, 070 [arXiv:0709.2092].
7. Ahmadov F.N., Manashova M.A., Study of WH production at LHC using different event generators, AJP FIZIKA, p.3-7 (2021).
8. ATLAS Collaboration, Observation of $H \rightarrow b\bar{b}$ decays and VH production with the ATLAS detector, Phys. Lett. B 786, 2018, 59.

MÜXTƏLİF HADİSƏ GENERATORLARINDAN İSTİFADƏ EDƏRƏK $ZH, H \rightarrow b\bar{b}$ HADİSƏLƏRİN SEÇİLMƏ ŞƏRTLƏRİNİN TƏDQIQI

F.N.ƏHMƏDOV, M.A.MANAŞOVA

XÜLASƏ

Bu işdə Higgs bozonunun Z -bozonu ilə assosiativ yaranma prosesi və onun əsas fon prosesləri olan ZZ və $Zb\bar{b}$ prosesləri, yaradılmış hadisələr səviyyəsində tədqiq edilmişdir. Siqnal və fon hadisələri CompHEP, POWHEG və PYTHIA generatorlarından istifadə etməklə yaradılmışdır. Bu üç generatordan alınan siqnal prosesi üçün bəzi kinematik dəyişənlərin paylanması müqayisə edilmişdir. Müəyyən edilmişdir ki, bu paylanmaların forması müxtəlif generatorlar üçün oxşardır. POWHEG paylanmalarının digər generatorlardan cüzi kənar çıxması onunla izah oluna bilər ki, o, effektiv kəsik üçün perturbativ nəzəriyyənin ikinci tərtib düzəlişindən istifadə etdiyi halda, digər generatorlar birinci tərtib düzəlişdən istifadə edir. Həmçinin, siqnal və fon prosesləri üçün spindən asılı yeni bucaq dəyişənləri müəyyən edilmiş və müqayisə edilmişdir. Bucaq dəyişənlərinin paylanmasında siqnal hadisələrinin sayının azaldığı, lakin fon hadisələrinin sayının sürətlə artdığı yan bölgələri kəsməklə siqnal/fon nisbətini əhəmiyyətli dərəcədə yaxşılaşdırmaq mümkündür.

Açar sözlər: Higgs bozonu, hadisə generatoru, assosiativ yaranma.

ИССЛЕДОВАНИЕ УСЛОВИЙ ВЫБОРА СОБЫТИЙ $ZH, H \rightarrow b\bar{b}$ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ РАЗЛИЧНЫХ ГЕНЕРАТОРОВ СОБЫТИЙ

Ф.Н.АХМАДОВ, М.А.МАНАШОВА

РЕЗЮМЕ

В данной работе анализируется процесс ассоциативного рождения бозона Хиггса с Z -бозоном и его основные фоновые процессы ZZ и $Zb\bar{b}$ на уровне генерации событий. Сигнальные и фоновые события генерируются с помощью генераторов CompuER, POWHEG и PYTHIA. Проведено сравнение распределений некоторых кинематических переменных для сигнального процесса, полученных от этих трех генераторов. Было установлено, что форма этих распределений одинакова для разных генераторов. Небольшое отклонение распределений POWHEG от других генераторов можно объяснить тем, что он использует следующий за ведущим порядок теории возмущений для сечения, тогда как другие генераторы используют ведущий порядок. Также были определены и сравнены новые угловые переменные, зависящие от спина, для сигнальных и фоновых процессов. Отношение сигнал/фон можно значительно улучшить, отрезав боковую область распределения угловых переменных, где число сигнальных событий уменьшается, но число фоновых событий быстро увеличивается.

Ключевые слова: бозон Хиггса, генератор событий, ассоциативное рождения.

UOT 543.06; 543.08**NANOHİSSƏCİKLƏR VƏ BİOLOJİ SİSTEMLƏRƏRASI
QARŞILIQLI ƏLAQƏLƏRİN ÜMUMİ XARAKTERİSTİKASI****A.H.KƏRİMOVA, N.X.QURBANOVA, V.Ş.YAQUBOV,
S.Q.NURİYEVA, H.A.ŞİRİNOVA*****Bakı Dövlət Universiteti*
*aynurakarimova16@gmail.com***

Məqalədə nanohissəciklər və bioloji sistemlərarası əlaqələrin ümumi xarakteristikasına dair ədəbiyyat analizi aparılmışdır. Eyni zamanda, bu sistemlərdə nanomaterial və bioloji komponentlərarası qarşılıqlı əlaqələrin fiziki-kimyəvi və bioloji xüsusiyyətlərinin ədəbiyyat təhlili yerinə yetirilmişdir. Belə ki, nanohissəciklər və bioloji sistemlərarası qarşılıqlı əlaqənin hissəciklərin ölçü və forması, kimyəvi tərkibi, hidrofillik/hidrofobluq xüsusiyyətləri, morfoloqiyası, səthinin yükü və aqlomerasiya dərəcəsi kimi parametrlərindən asılılığı tədqiq edilmiş və bu zaman yaranan qarşılıqlı təsir qüvvələrinin təbiəti və protein koronanın formalaşması prosesi izah edilmişdir.

Açar sözlər: proteinkorona, nanohissəcik, zülal, membran, toksiklik, hüceyrə, funksional qrup, qarşılıqlı təsir, hidrofil, hidrofob, bioloji mühit.

GİRİŞ

Unikal xassələrə malik olan nanomateriallar [1, 2] tibbin yalnız diaqnostika sahəsinə gətirdikləri yeniliklərlə deyil, bir çox xəstəliklərin müalicəsində effektivliyi ilə də diqqət mərkəzindədirlər [3, 4, 5]. Müasir dövrdə nanotexnologiyanın imkanlarından tibbin müxtəlif sahələrində geniş istifadə edilməsi müəyyən sahələrin inkişafı ilə yanaşı bir sıra problemlərin yaranmasına da səbəb olmuşdur [6, 7]. Belə ki, ölçüləri bioloji obyektlərlə (zülal, membran, fosfolipid, orqanel, DNT və s.) eyni olan nanohissəciklərin manipulyasiya proseslərinin təhlükəsizliyi məsələsi, hazırda, elmin qarşısında duran aktual problemlərdən hesab edilir.

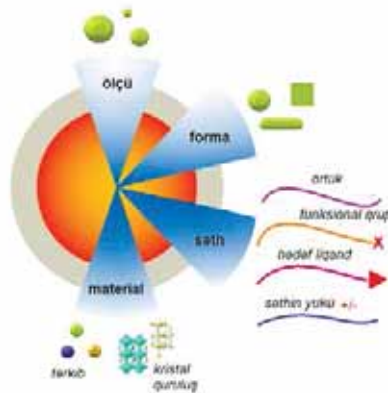
Məlumdur ki, nanohissəciklər mikro- və makroskopik analoqlarından əsaslı şəkildə fərqlənən fiziki və kimyəvi xassələr nümayiş etdirir. Bu isə, öz növbəsində, onların digər sistemlərlə, məsələn, insan orqanizminə daxil olduqda tamamilə yeni və əvvəllər məlum olmayan qarşılıqlı təsirlərin ortaya çıxmasına səbəb olur. Müəyyən mənada, insan orqanizmindəki mürəkkəb

quruluşlu mütəşəkkil molekulların (məsələn, ribosomların) təbii nanoobyekt kimi xarakterizə edilməsi mümkündür. Məhz bu səbəbdən nanohissəciklər biomühitdə asanlıqla adaptasiya edə bilər, məsələn, hüceyrə “divarlarından” nüfuz edə və təbii nanoobyektlərdən olan sitoskeletal elementlərlə müxtəlif növ qarşılıqlı təsirlərdə ola bilərlər.

İcmal məqalə nanoobyektlərin quruluş və xassələrinin onların bioloji sistemlərlə qarşılıqlı əlaqəsinə təsirinin araşdırılmasına həsr edilmişdir. Eyni zamanda, bu sistemlərdə nanomaterial və bioloji komponentlər arasındakı qarşılıqlı əlaqələrin fiziki-kimyəvi və bioloji xüsusiyyətlərinin ədəbiyyat təhlili aparılmışdır.

1. Nanohissəciklərin xüsusiyyətlərinin bioloji sistemlərlə qarşılıqlı əlaqəyə təsiri

Nanohissəcik və bioloji sistem arasındakı qarşılıqlı əlaqə və onun əsas xüsusiyyətləri, ilk növbədə, nanohissəciyin özünün fiziki-kimyəvi xassələrindən asılıdır [8] (şəkil 1). Bu xassələrə hissəciklərin ölçü və forması, örtük materialının xassəsi, morfolojiyası, səthinin yükü və onda funksional qrupların mövcudluğu, hidrofillik/hidrofobluq xüsusiyyətləri, kimyəvi tərkibi, kristallik quruluşu və nəhayət, aqlomerasiya dərəcəsi daxildir. Qeyd etmək lazımdır ki, nanohissəciklərin hüceyrə səviyyəsində biouyğunluq mexanizmi də sadalanan xassələrdən əhəmiyyətli dərəcədə asılıdır.



Şəkil 1. Bioloji sistemlərlə qarşılıqlı əlaqəyə təsir edən əsas nanohissəcik xüsusiyyətləri.

1.1. Ölçü

Orqanizmin nanohissəciklərlə qarşılıqlı əlaqəsi birbaşa olaraq onların ölçüləri ilə xarakterizə olunur [9]. Belə ki, nanohissəciklərin bioloji obyektlərlə bağlı bütün qarşılıqlı təsir mexanizmləri, məsələn, hüceyrə səthlərində onların yığılması və eləcə də udulma prosesləri ölçü parametridən kəskin şəkildə asılıdır [10]. Belə ki, hissəciyin ölçüsü kiçildikcə onun hüceyrə

membranı ilə qarşılıqlı əlaqə qüvvəsi böyüyür [11]. Bu fakt nanohissəcik ölçüsünün kiçilməsi ilə onun səthinin həcmə olan nisbətinin artması və bu da, öz növbəsində, hissəciklərdə kontakt səthinin böyüməsi, reaksiyaya girmə qabiliyyətinin artması ilə izah olunur. Məlumdur ki, ölçüləri təqribən 50 nm-dən kiçik olan nanohissəciklər orqanizmə daha rahat şəkildə daxil ola və sürətli şəkildə toxumalarla birləşə bilir ki, bu da onların daha çox toksik xüsusiyyətlərinin üzə çıxmasına səbəb olur [12]. Məsələn, Kim və əməkdaşları [13] tərəfindən üç müxtəlif ölçüdə (~10 nm, 50 nm, 100 nm) sintez edilmiş gümüş nanohissəciklərinin MC3T3-E1 və PC12 də daxil olmaqla bir neçə hüceyrə xətlərində toksikliyi tədqiq edilmişdir. Müəyyən edilmişdir ki, 10 nm ölçülü gümüş nanohissəcikləri digər böyük ölçülü hissəciklərlə müqayisədə daha çox hüceyrə apoptozuna səbəb olmuşdur.

Nanohissəcik ölçüsü onların *in vivo* paylanması və ya farmakoloji xüsusiyyətlərinə, həmçinin fizioloji aktivliklərinə də birbaşa təsir göstərə bilər [14]. Ölçüləri 1 mkm-dən böyük olan nanohissəciklər hüceyrəyə asanlıqla daxil ola bilmir, lakin hüceyrə tərəfindən absorbsiya olunan zülallarla qarşılıqlı təsirdə ola bilər. 6 nm-dən böyük ölçülərə malik olan nanohissəciklər isə böyrəklərdən süzülür və spesifik orqanlarda toplanır [15]. Sonvan və digərləri [16] tərəfindən müəyyən edilmişdir ki, qızıl nanohissəciklərinin müxtəlif toxumalarda toplanması bilavasitə onların ölçülərindən asılı olmuşdur. Belə ki, ölçüləri təqribən 15 nm olan qızıl nanohissəciklərinin qan, qaraciyər, ağciyər, dalaq, böyrək, beyin, ürək və mədədə qatılığı daha böyük ölçülü (50 nm, 100 nm və 200 nm) qızıl nanohissəciklərinin qatılığından dəfələrlə çox olmuşdur. Həmçinin beyində bu hissəciklərin müəyyən edilməsi onların hematoensefalik baryeri (qan-beyin baryerini) aşma bilməsini də nümayiş etdirmişdir.

1.2. Forma

Nanomaterialların toksikliyinə təsir edən fiziki-kimyəvi xassələrdən biri onların formasıdır [17]. Nanohissəciklərin müxtəlif struktur və formalarda sintezi mümkündür ki, bura, boru, lif, sferik, müstəvi və s. quruluşlar aiddir. Nanohissəciciyin forması, həmçinin onların biomühitdə endositoz, paylanma və seçicilik xassələrinə təsir edir [18]. Bunun əsas səbəblərindən biri isə müxtəlif formalı hissəciklərdə fərqli quruluş ayrılıqlarının olmasıdır. Belə ki, eyni ölçülü boru şəkilli, başqa sözlə desək, silindrik formalı nanohissəciklərin membranla örtülmə müddəti sferik quruluşlu hissəciklərlə müqayisədə daha çoxdur. Məhz buna görə də sferik formalı nanohissəciklər daha asan və sürətli şəkildə hüceyrə tərəfindən “tanına” bilirlər [19]. Bununla yanaşı, müəyyən edilmişdir ki, belə formalı hissəciklər daha az toksiklik nümayiş etdirirlər. Belə ki, bir qrup tədqiqatçılar tərəfindən mikro-, nanoölçülü və çubuqvari Fe₂O₃ hissəcikləri sintez edilmiş və onların sitotoksiklik

xüsusiyyətləri tədqiq edilmişdir [20]. Məlum olmuşdur ki, müqayisədə makrofaq hüceyrələrdə daha yüksək dərəcədə nekrozun yaranması məhz çubuqvari nanohissəciklərin iştirakı zamanı müşahidə edilmişdir. Bu, membranın çubuqvari Fe_2O_3 nanohissəcikləri tərəfindən daha çox zədələnməsi və aktiv forma oksigenin sintez olunması ilə bağlı olmuşdur.

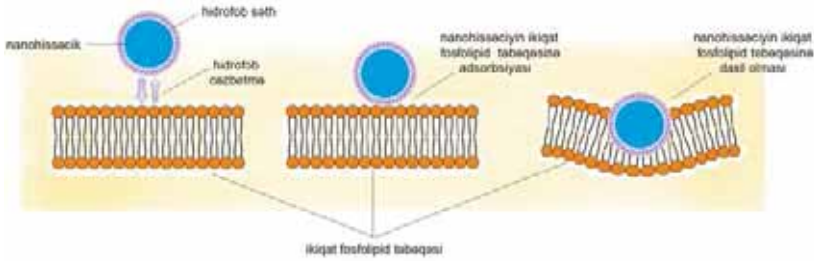
1.3. Səthin modifikasiyası

Nanohissəcik səthinin xüsusiyyətləri onların hüceyrələrlə qarşılıqlı əlaqəsinə təsir edən əsas parametrlərdəndir. Səth örtüyünün dəyişilməsi hissəciyin maqnit, elektrik, kimyəvi və optik xassələrinin dəyişilməsinə səbəb olur ki, bu da onların farmokinetik, paylanma, akkumilyasiya və toksiklik xassələrinə əhəmiyyətli dərəcədə təsir edir [21, 22, 23].

Səthin yükü və onun sıxlığı nanohissəciklərin hüceyrə tərəfindən udulma dərəcəsinə, həmçinin, biomolekullarla qarşılıqlı əlaqəsinə təsir edə bilər [24, 25]. Belə ki, mənfi yüklü strukturların hüceyrə səthi ilə birləşməsi neytral və ya müsbət yüklü hissəciklərlə müqayisədə daha zəifdir ki, bu da onların daha kiçik endositoz udulma ilə xarakterizə olunmasına səbəb olur. Bir qrup tədqiqatçılar [26] tərəfindən müəyyən edilmişdir ki, müsbət yüklü qızıl nanohissəcikləri orqanizmdən daha tez filtrasiya olunur. Belə ki, orqanizmə neytral, müsbət və mənfi yüklü hissəciklərin daxil edilməsindən sonra qaraciyərin optik və LA-ICP-MS kəmiyyət analizi aparılmış və müsbət yüklü nanohissəciklərin Kupfer hüceyrələrində olmaması sübut edilmişdir. Bununla yanaşı müəyyən edilmişdir ki, neytral nanohissəciklər əsasən immun sistemə cavabdeh olan toxumalarda toplanmışdır. Müəlliflərin fikrincə, buna səbəb neytral nanohissəciklərin daha çox IgG və ya fibrinogen zülallar saxlayan immun zülal korona ilə örtülməsidir. Mənfi yüklənmiş qızıl nanohissəciklər neytral strukturlarla müqayisədə immun sistemlə daha az qarşılıqlı əlaqədə olur, lakin müsbət yüklənmiş hissəciklər kimi orqanizmdən tez təmizlənmir. Həmçinin nanohissəcik səthinin yükü artdıqca onların sitotoksiklik xassəsi də artır [27]. Belə ki, müsbət yüklü hissəciklər hüceyrələrlə elektrostatik qarşılıqlı əlaqələrinin artmasına və nəticədə daha yüksək endositik udulmaya səbəb olurlar [28]. Müsbət yüklü hissəciklərin müqayisədə interstisial mühitdə daha asanlıqla ayrılma bilməsi onların şiş hüceyrələrində daha çox toplanmağa meyilli olmasına səbəb olur [14]. Antimikrob, katalitik, yarımkeçirici və maqnit xassələrinə malik olan sink oksid (ZnO) nanohissəciklərinin toksiklik xassələrinin səthinin yükündən asılılığı Baek və s. tərəfindən araşdırılmışdır [29]. Müsbət və mənfi yüklü səthlərə malik nanohissəciklərin hüceyrə xətlərinin həm qısa, həm də uzunmüddətli perspektivlərdə yaşama qabiliyyətləri, membranlarının zədələnməsi və aktiv oksigen formasının yaranması faktorları tədqiq edilmişdir. Bütün hallarda müsbət yüklü səthə malik ZnO nanohissəciklərinin mənfi

yüklü plazmatik membran ilə qüvvətli qarşılıqlı təsiri daha çox toksik effektlərin meydana gəlməsinə səbəb olmuşdur.

Nanohissəciklərin hidrofobluq/hidrofillik xassələri onların biomolekullar və hüceyrələrlə qarşılıqlı əlaqəsinə təsir edən digər fiziki-kimyəvi parametrlərdəndir. Maraqlı tədqiqat işlərindən birində hidrofob və yarımhidrofil nanohissəciklərin biomembranla qarşılıqlı əlaqə mexanizminin modelləşdirilməsi aparılmışdır [30]. Alınmış nəticələrə əsasən müəyyən edilmişdir ki, hidrofob nanohissəciklər bilaya daxil ola bildikləri halda, yarımhidrofil nanohissəciklər yalnız membranın üst qatında müşahidə edilmişdir. Hüceyrə membranı tərəfindən daha çox hidrofob nanohissəciklərin udulması onların lipid quyruqları ilə daha çox əlaqəyə girmək meyilliyi ilə izah edilir [31] (şəkil 2).



Şəkil 2. Hidrofob səthə malik nanohissəcikin membrandan daxil olma prosesi.

Ümumiyyətlə, səthin kimyəvi modifikasiyası biotibbi məqsədlər üçün istifadə edilən nanohissəciklərin toksikliyinə azaldılmasına, hüceyrəyə daxil olmanın idarə edilməsi və modullaşdırılmasına imkan yaradır [32]. Bununla yanaşı, yüksək ion qüvvəsinə malik olan bioloji mayelərdə nanohissəciklərin aqreqasiyası baş verir ki, bu zaman səthin modifikasiyası bu problemin həllində vacib rol oynaya bilər. Həmçinin biomolekullarda böyük miqdarda lipid, şəkər, nuklein turşuları və xüsusən də zülalların iştirakı nanohissəciklərin fizioloji mühitdə stabilliyinə əhəmiyyətli dərəcədə təsir göstərir [33]. Digər bir işdə [34] sintez olunmuş maqnetit (Fe_3O_4) nanohissəciklərin səthi kovalent əlaqə vasitəsilə polietilenqliköl (PEQ-COOH) və ya karboksimetil dekstran (KMD) ilə örtülmüşdür. Analiz zamanı müəyyən edilmiş zeta potensialın qiyməti PEQ və ya KMD ilə örtülmə zamanı $pH=7$ və eləcə də, məsələn, NaCl kimi elektrolit mühitində maqnit nanohissəciklərinin stabil qalmasını göstərmişdir. Bu işə modifikasiya olunmuş maqnit nanohissəciklərinin xərçəng xəstəliyinin müalicəsində tətbiq olunan hipertermiya üsulunda və ya maqnit rezonans tomoqrafiya metodunda kontrast agentlər kimi istifadə olunmasında geniş perspektivlər yaradır.

Bundan başqa səthin kimyəvi modifikasiyası nanohissəciklərin hüceyrələr tərəfindən qeyri-spesifik udulmasının, məsələn, qaraciyərdə makrofaq-

lar tərəfindən faqositoz prosesinin qarşısının alınması üçün vacibdir [35]. Səthin kimyəvi modifikasiyası eyni zamanda nanohissəciklərin toksiklik xassələrinin azalmasına səbəb olur ki, bu da onların potensial tətbiqi üçün olduqca vacibdir. Nguyen və həmkarları tərəfindən [36] müxtəlif ölçülü örtüksüz və polivinilpirolidon (PVP) ilə örtülmüş gümüş nanohissəciklərinin J774A.1 makrofaq və HT29 epitel hüceyrələrdə toksiklik xüsusiyyətləri araşdırılmışdır. Məlum olmuşdur ki, test aparılan hüceyrələrdə örtüksüz gümüş nanohissəcikləri immun reaksiyaların qarşısını almaqla bərabər oksidativ stresin böyüməsinə səbəb olduğu halda, örtüyə malik nanohissəciklər sitokinlərin səviyyəsini artırmaqla toksiklik effektlərini tənzimləyə bilmişdir.

2. Nanohissəcik və bioloji sistemlərarası qarşılıqlı təsir qüvvələri

İlk baxışdan belə qəbul oluna bilər ki, nanohissəciklər bioloji sistemlərə daxil edilərkən onlar və bioloji obyektlər arasında baş verən qarşılıqlı təsir qüvvələri klassik kolloid kimyanın qanunları ilə xarakterizə oluna bilər. Əslində, belə sistemlərdə Van-der-Vaals və elektrostatik qüvvələr, həlledicinin təsiri, hidrofob effektlər müşahidə edilir (cədvəl 1).

Cədvəl 1

Nanoobyektlər və bioloji sistemlər arasında baş verən bəzi qarşılıqlı təsir qüvvələri [37]

Qarşılıqlı təsir qüvvəsi	Təbiəti	Baş verdiyi ölçü həddi (nm)	Əsas xüsusiyyətləri
Hidrodinamik qüvvələr	Nanoskopik ölçülərdə deformasiya qüvvələri, broun diffuziyası çox zaman çətinləşir və ya əksinə qüvvətlənir.	10^2-10^6	Hissəciklərarası toqquşma tezliyinin artması
Elektrodinamik qarşılıqlı təsirlər	Qarşılıqlı əlaqədə olan hissəciklər və mühit arasında Van-der-Vaals qüvvələri	1–100	Sulu məhlullarda cəzəbməni təmin edir; Bioloji mühitdə qarşılıqlı təsir qüvvəsi zəifləyir
Elektrostatik qarşılıqlı təsir	Yüklənmiş səth əks yüklü ionları cəlb edir, eyniyüklü ionları itələyir və səthdə ikiqat elektrostatik təbəqə əmələ gəlir.	1–100	İkiqat elektrostatik təbəqələr əksər hallarda bir-birini itələyir. Buna səbəb məhlulda bir çox materialların mənfi ionlaşmasıdır.
Həlledicinin təsiri və hidrofob effekt	Hidrofob materiallar həlledicidən “qorunmağa” çalışır.	1–10	Hidrofob materiallar həlledicidən “qorunmağa” çalışır.

Lakin nanoskopik ölçünün nəzərə alınması ilə bir sıra düzəlişlərin aparılması kifayət qədər vacib məsələyə çevrilir [38, 39]. Nanosistemlərin özünəməxsusluğu onların az sayda atomlardan təşkil olunması və bu atomların əsasən səthdə yerləşməsidir. Məhz bu səbəbdən nanohissəciklər arası qarşılıqlı əlaqələr onların səth atomlarının oriyentasiyası və dielektrik xassələrindən asılı olacaqdır. Nano-bio interfeysinin xüsusiyyətlərini vurğulamaq üçün iki nanohissəcik arasında baş verən qarşılıqlı əlaqə və nanohissəciklə canlı hüceyrə arası qarşılıqlı təsirin müqayisəsinin aparılması vacibdir.

İki, məsələn, qeyri-üzvi nanohissəcik məhlulda bir-birlərini Van-der-Vaals qüvvələri ilə cəlb edir və elektrostatik qarşılıqlı təsirdə olurlar. Van-der-Vaals qarşılıqlı təsir qüvvələri elektronların kvant mexaniki rəqsi hərəkətləri hesabına hissəciklərdə kiçik dipolun yaranmasına və bu da qonşu atomlarda dipol momentinin əmələ gəlməsi və onlar arasında cəzətmə qüvvəsinin meydana çıxmasına səbəb olur. Elektrostatik qarşılıqlı təsirə səbəb isə hər iki hissəciyin məhlulda ionlaşması və səthlərinin mənfi yüklənməsi ilə bağlıdır. Belə qarşılıqlı əlaqəyə əhəmiyyətli dərəcədə təsir göstərən digər faktorlar isə solvatlaşma və hidrofob effektləridir [40].

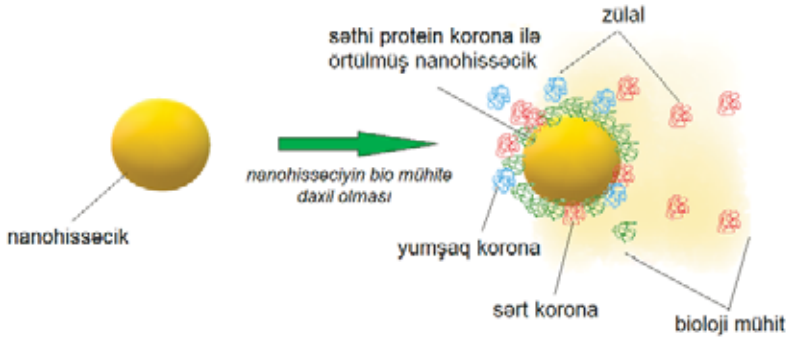
Nanohissəciyin bioloji obyektə, məsələn, fibroplastla qarşılıqlı əlaqə qüvvəsi, prinsipə yuxarıda təsvir edilən iki qeyri-üzvi nanohissəcik arası qarşılıqlı təsir qüvvəsi ilə eynidir. Lakin əsaslı fərq nanohissəciyin hüceyrə membranının səthinə yaxınlaşdığı zaman müşahidə edilir. İlk növbədə, nəzərə alınmalıdır ki, hüceyrə membranı deformasiyaya uğraya və daima öz formasını dəyişə bilən bir xüsusiyyətə malikdir [41]. Bununla yanaşı, əlavə çətinliklər membranın heterogen quruluşa malik olması ilə də bağlıdır ki, bura həm zülal, həm də lipidlər daxildir. Ən əsası isə hüceyrələr passiv obyektlər deyildir və onlar fasiləsiz olaraq ionların daşınması, zülalların və eləcə də digər bioloji obyektlərin sekresiyası və s. prosesləri həyata keçirməklə nanohissəcikləri ilkin olaraq sistemə daxil olduğundan fərqli səthə malik olan quruluşa çevirirlər. Bu fenomen zamandan asılı olan dinamik interfeys konsepsiyasını əmələ gətirir [42]. Əgər nanohissəciklərin geometrik parametrlər, fiziki-kimyəvi xassələr və kristallik xassələrinə görə də bir-birindən fərqlənməsini nəzərə alsaq, bu zaman, nanohissəciklər və bioloji obyektlər arasında praktik olaraq sonsuz sayda “interfeys” formalarının yarana bilməsi faktı ilə qarşılaşacayıq. Bu halda isə hər bir növ nanohissəcik üçün ayrı-ayrılıqda bioloji sistemlə qarşılıqlı əlaqənin xüsusiyyətlərinin öyrənilməsi demək olar ki, qeyri-mümkün olacaqdır. Qarşılıqlı təsir zamanı endositozun baş vermə ehtimalının olması isə nano-bio qarşılıqlı əlaqələrinin nəzəri olaraq proqnozlaşdırılması məsələsini çətinləşdirir. Hissəciklərin faqositoz prosesi üçün xüsusi reseptor-liqand qarşılıqlı təsirlər və digərləri də, məsələn, elektrostatik, sterik itələmə və Van-der-Vaals cəzətmə qüvvələri daxil olmaqla nano-bio sistemin qarşılıqlı əlaqəsinin modelləş-

dirilməsi cəhdləri olmuşdur [43]. Ümumiyyətlə, nanohissəciklər və bioloji obyektlərarası qarşılıqlı təsirlərin xüsusiyyətləri aparılan eksperimentlərə görə dəyişilir ki, bunun əsas səbəbləri kimi hüceyrə növlərinin müxtəlifliyini, onların differensiasiya mərhələlərini, hüceyrə mühitinin tərkibi və fərqli işlənmə yollarını aid etmək olar.

3. Protein korona

Bioloji mühitin əsas xüsusiyyətlərindən biri nanohissəciklərin qan, plazma və ya hüceyrələrarası mayeyə daxil olduqda onların səthində zülaldan ibarət təbəqəni – “koronanı” əmələ gətirməsidir [44, 45]. Belə protein təbəqə və ya bioloji makromolekul nanohissəciklərin bir sıra fiziki-kimyəvi xassələrini (səthin yükü, həllolma və s.) dəyişə bilmək və eyni zamanda, onları müxtəlif hüceyrə və toxumalar üçün “tanınan” edə bilmək xüsusiyyətinə malik olur [46]. Nanohissəciklərin zülallarla örtülməsi, müəyyən mənada onların gələcək taleyini - toxumalar və orqanlarda paylanmasını, orqanizmdən çıxma sürətini və opsonizasiyasını (membran reseptorlarının iştirakı ilə faqositoz)müəyyən edir. Göründüyü kimi, məhz bu proses *in vitro* və *in vivo* tədqiqatları zamanı fərqli nəticələrin alınmasının səbəbidir. Belə ki, nanohissəciklər hüceyrə xətlərində yaxşı nəticələr göstərdiyi halda, canlı orqanizmlərdə heç bir effektivliyə malik olmaya bilir [47, 48, 49]. Mahl və əməkdaşları [50] tərəfindən aparılmış tədqiqat işində polisaxarid-nanohissəcik sistemi bronxial epitel hüceyrə xətlərinə daxil edilərkən serumun iştirakı zamanı onların bioloji mühitdən təmizlənməsi müşahidə edilmişdir. Nəticə olaraq bioloji effektlərin nanohissəcik səthində zülal layından birbaşa asılılığı müəyyən edilmişdir. Nanohissəcik səthindəki protein korona onların biomühitdə özünü aparmasına təsir etməklə bərabər özləri də müəyyən dəyişikliklərə uğrayırlar. Belə modifikasiyaların baş vermə səbəbi protein korona ilə nanohissəciklərin qarşılıqlı əlaqəsi hesabınadır [51, 52]. Makromolekul təbəqəsinin tərkibi, sıxlığı və formalaşma mexanizmi nanohissəciklərin fiziki-kimyəvi xassələri ilə yanaşı, assosiasiya/dissosiasiya sabitləri, bioloji mühitdə olan zülalların növləri, mühitin pH və temperaturu, nanohissəciyin lokasiyası kimi proseslərdən də asılı olur.

Vroman effektinə [53] əsasən nanohissəcik səthinə ilk növbədə yüksək qatılığa və kiçik oxşarlığa malik proteinlər birləşir və sonradan tədricən kiçik qatılığa, lakin böyük bənzərliyə malik proteinlərlə əvəz olunurlar. Dinamik bir proses olaraq protein koronanın əmələ gəlməsi adətən oxşarlıq xüsusiyyətləri və proteinin mübadilə zamanına görə iki sinfə ayrılır ki, bura sərt (dönməyən) və yumşaq (dönen) formalar aid edilir [54] (şəkil 3).



Şək. 3. Nanohissəcik səthində protein koronanın əmələ gəlməsi

Sərt koronada zülallar səthə daha çox oxşarlığı və daha uzun mübadilə vaxtı ilə xarakterizə olunurlar. Burada zülallar nanohissəcik səthinə ən yaxın məsafədə yerləşdiyinə görə nanohissəciiyin funksionallığından, hidrofob və ya hidrofiliyindən, bioloji mayenin təbiəti və temperaturundan asılı olaraq termodinamiki dəyişikliklərə (dönməyən) daha həssas olurlar [55]. Yumşaq korona təbəqəsinin səthə oxşarlığı kiçik, lakin mübadilə periodu qısaadır. Həmçinin, müəyyən edilmişdir ki, sərt korona təbəqəsi səthə daha qüvvətli şəkildə bağlandıqı halda, yumşaq korona nanohissəciiyin səthi ilə birbaşa bağlı olmur və burada yalnız zəif qarşılıqlı təsir qüvvələri özünü göstərir [49].

Hüceyrələr biomühitə daxil olmuş nanohissəciiyi deyil, nanohissəcik-protein təbəqəsini “görür” və bu səbəbdən də nanoquruluşların bioloji obyektlərlə qarşılıqlı əlaqəsinin müəyyən edilməsində bu protein təbəqəsi əhəmiyyətli rol oynayır [56]. Əksər hallarda nanohissəciklərin hüceyrələr tərəfindən zəbti sərt korona ilə korrelyasiya olunur və nanohissəciklərin zülallar, fosfolipidlər, membranlar, DNT və s. əlaqəsinin yaxşılaşdırılmasında rol oynaya bilir [57]. Başqa sözlə desək, korona biomolekul növlərinin və qarşılıqlı əlaqə formalarının seçilməsini “idarə” edə bilmək xüsusiyyətinə malikdir. Bununla yanaşı, protein korona orqanizmin immun reaksiyasını [58] stimullaşdırır və ya zəiflədə bilmək xassəsinə malikdir ki, bu da öz növbəsində sitotoksiklik xassələrinin öyrənilməsində kifayət qədər vacib faktordur [59]. Şannahan və digərləri [57] tərəfindən aparılmış tədqiqat işində müxtəlif ölçülərə malik gümüş nanohissəcikləri sintez edilmiş və səthlərindən protein korona ayrıldıqdan sonra faqosit hüceyrələrə təsiri araşdırılmışdır. Məlum olmuşdur ki, zülal təbəqəsi olmayan nanohissəciklər Ag^+ toksik ionlarını əmələ gətirmiş və hüceyrələrin məhvinə səbəb olmuşdur.

Beləliklə, protein koronanın əmələ gəlməsi, xassələrinin idarə edilməsi, nanohissəcik səthi və digər bioloji materiallarla qarşılıqlı əlaqəsinin araşdırılması nanoquruluşların biotibbi tətbiqi üçün vacib məsələlərdəndir [60, 61].

Nəticə

Nanohissəcik iştirakına bioloji mühitin reaksiyasının tədqiqinin həyata keçirilməsi nanohissəcik dizaynından asılı olan nano-bio qarşılıqlı təsirin öyrənilməsi ilə paralel şəkildə aparılır. Bir çox tədqiqatlar nanohissəciklərin insan orqanizminə daxil ola bilməsini sübut etmişdir. Beləliklə, bioloji sistemlərdə nanohissəciklərin fiziki-kimyəvi xassələrinin (ölçü, forma, səthin yükü, kimyəvi tərkib və s.), onları əhatə edən biomolekulların növü və nanohissəcik səthində yaranan protein koronanın biooxşarlılığı kimi məsələlərin araşdırılması kifayət qədər vacib problemlərdəndir. Belə ki, məhz qeyd olunan xüsusiyyətlər nanohissəciklərin hüceyrələr və toxumalarla qarşılıqlı əlaqəsini müəyyən etməyə, onların bioloji mühitdə özünü necə aparmasını tədqiq etməyə imkan verir. Məhz bu istiqamətdə aparılmış bir sıra tədqiqat işləri nanohissəciklərin tibbi məqsədlər üçün biouyğunluq dərəcəsini və bioloji mikromühitdə toksiklik xassələrini ayırd etməyə imkan yaratmışdır. Nanohissəciklərin belə xassələrinin idarə edilməsi onların tibbin müxtəlif sahələrində, xüsusilə də, immunoterapiyada geniş şəkildə istifadəsinə imkanlar yarada bilər. Belə ki, immunoterapiyanın nanotibblə kombinasiyası öz növbəsində bir sıra xəstəliklərin, məsələn, xərçəngin müxtəlif növlərinin müalicəsində effektiv rol oynaya bilər.

ƏDƏBİYYAT

1. Khan, I., Saeed, K. & Khan, I. Nanoparticles: Properties, applications and toxicities. Arab. J. Chem.12, 2019, p.908–931.
2. Mourdikoudis, S., Pallares, R. M. & Thanh, N. T. K. Characterization techniques for nanoparticles: Comparison and complementarity upon studying nanoparticle properties. Nanoscale10, 12871–12934 (2018).
3. Alharbi, K. K. & Al-sheikh, Y. A. Role and implications of nanodiagnostics in the changing trends of clinical diagnosis. Saudi J. Biol. Sci.21, 109–117 (2014).
4. Baetke, S. C., Lammers, T. & Kiessling, F. Applications of nanoparticles for diagnosis and therapy of cancer. Br. J. Radiol.88, (2015).
5. İlem-Özdemir, D. Nanoparticles: From Diagnosis to Therapy.Int. J. Med. Nano Res.3, 1–5 (2016).
6. Choi, J. & Sun, N. Nanoparticles in Biomedical Applications and Their Safety Concerns. Biomed. Eng. - From Theory to Appl.(2011) doi:10.5772/18452.
7. Stern, S. T. & McNeil, S. E. Nanotechnology safety concerns revisited. Toxicol. Sci.101, 4–21 (2008).
8. Zhao, Z., Ukidve, A., Krishnan, V. & Mitragotri, S. Effect of physicochemical and surface properties on in vivo fate of drug nanocarriers. Adv. Drug Deliv. Rev.143, 3–21 (2019).
9. Ankamwar, B. Size and Shape Effect on Biomedical Applications of Nanomaterials. 20–40 (2012).
10. Aillon, K. L., Xie, Y., El-gendy, N., Berkland, C. J. & Forrest, M. L. Effects of nanomaterial physicochemical properties on in vivo toxicity. Adv. Drug Deliv. Rev.61, 457–466 (2009).
11. Huang, Y. W., Cambre, M. & Lee, H. J. The Toxicity of Nanoparticles Depends on

- Multiple Molecular and Physicochemical Mechanisms. *Int. J. Mol. Sci.*18, (2017).
12. Ajdary, M. et al. Health concerns of various nanoparticles: A review of their in vitro and in vivo toxicity. *Nanomaterials*8, 1–28 (2018).
 13. Kim, T. H. et al. Size-dependent cellular toxicity of silver nanoparticles. *J. Biomed. Mater. Res. - Part A*100 A, 1033–1043 (2012).
 14. Hoshyar, N., Gray, S., Han, H. & Bao, G. The effect of nanoparticle size on in vivo pharmacokinetics and cellular interaction. *Nanomedicine*11, 673–692 (2016).
 15. Albanese, A., Tang, P. S. & Chan, W. C. W. The Effect of Nanoparticle Size, Shape, and Surface Chemistry on Biological Systems. *Annu. Rev. Biomed. Eng.*14, 1–16 (2012).
 16. Sonavane, G., Tomoda, K. & Makino, K. Biodistribution of colloidal gold nanoparticles after intravenous administration: Effect of particle size. *Colloids Surfaces B Biointerfaces*66, 274–280 (2008).
 17. Lee, Y. J., Ahn, E. Y. & Park, Y. Shape-dependent cytotoxicity and cellular uptake of gold nanoparticles synthesized using green tea extract. *Nanoscale Res. Lett.*14, 1–14 (2019).
 18. Yang, L., Zhou, Z., Song, J. & Chen, X. Anisotropic nanomaterials for shape-dependent physicochemical and biomedical applications. *Chem. Soc. Rev.*48, 5140–5176 (2019).
 19. Oh, N. & Park, J. H. Endocytosis and exocytosis of nanoparticles in mammalian cells. *Int. J. Nanomedicine*9, 51–63 (2014).
 20. Lee, J. H. et al. Rod-shaped iron oxide nanoparticles are more toxic than sphere-shaped nanoparticles to murine macrophage cells. *Environ. Toxicol. Chem.*33, 2759–2766 (2014).
 21. Zhang, W. et al. Surface impact on nanoparticle-based magnetic resonance imaging contrast agents. *Theranostics*8, 2521–2548 (2018).
 22. Li, Y. et al. Impact of anti-biofouling surface coatings on the properties of nanomaterials and their biomedical applications. *J. Mater. Chem. B*6, 9–24 (2017).
 23. Fernández-Ponce, C. et al. Influence of size and surface capping on photoluminescence and cytotoxicity of gold nanoparticles. *J. Nanoparticle Res.*20, (2018).
 24. Asati, A., Santra, S., Kaittanis, C. & Perez, J. M. Surface-charge-dependent cell localization and cytotoxicity of cerium oxide nanoparticles. *ACS Nano*4, 5321–5331 (2010).
 25. Liang, M. et al. Cellular uptake of densely packed polymer coatings on gold nanoparticles. *ACS Nano*4, 403–413 (2010).
 26. Allen, C. et al. Research highlights: investigating the role of nanoparticle surface charge in nano-bio interactions. *Environ. Sci. Nano*4, 741–746 (2017).
 27. Foroozandeh, P. & Aziz, A. A. Insight into Cellular Uptake and Intracellular Trafficking of Nanoparticles. *Nanoscale Res. Lett.*13, (2018).
 28. Hühn, D. et al. Polymer-coated nanoparticles interacting with proteins and cells: Focusing on the sign of the net charge. *ACS Nano*7, 3253–3263 (2013).
 29. Baek, M. et al. Factors influencing the cytotoxicity of zinc oxide nanoparticles: Particle size and surface charge. *J. Phys. Conf. Ser.*304, (2011).
 30. Li, Y., Chen, X. & Gu, N. Computational investigation of interaction between nanoparticles and membranes: Hydrophobic/hydrophilic effect. *J. Phys. Chem. B*112, 16647–16653 (2008).
 31. Ding, H. M. & Ma, Y. Q. Interactions between Janus particles and membranes. *Nanoscale*4, 1116–1122 (2012).
 32. Chompoosor, A. et al. The role of surface functionality on acute cytotoxicity, ROS generation and DNA damage by cationic gold nanoparticles. *Small*6, 2246–2249

- (2010).
33. Guerrini, L., Alvarez-Puebla, R. A. & Pazos-Perez, N. Surface modifications of nanoparticles for stability in biological fluids. *Materials (Basel)*.11, 1–28 (2018).
 34. Barrera, C., Herrera, A., Zayas, Y. & Rinaldi, C. Surface modification of magnetite nanoparticles for biomedical applications. *J. Magn. Magn. Mater.*321, 1397–1399 (2009).
 35. Van Haute, D., Liu, A. T. & Berlin, J. M. Coating Metal Nanoparticle Surfaces with Small Organic Molecules Can Reduce Nonspecific Cell Uptake. *ACS Nano*12, 117–127 (2018).
 36. Nguyen, K. C. et al. Comparison of toxicity of uncoated and coated silver nanoparticles. *J. Phys. Conf. Ser.*429, (2013).
 37. Nel, A. E. et al. Understanding biophysicochemical interactions at the nano-bio interface. *Nat. Mater.*8, 543–557 (2009).
 38. Min, Y., Akbulut, M., Kristiansen, K., Golan, Y. & Israelachvili, J. The role of interparticle and external forces in nanoparticle assembly. *Nanosci. Technol. A Collect. Rev. from Nat. Journals* 38–49 (2009)
 39. Kim, H. Y., Sofo, J. O., Velegol, D., Cole, M. W. & Lucas, A. A. Van der waals dispersion forces between dielectric nanoclusters. *Langmuir*23, 1735–1740 (2007).
 40. Velegol, D. Assembling colloidal devices by controlling interparticle forces. *J. Nanophotonics*1, 012502 (2007).
 41. Dagastine, R. R. et al. Dynamic forces between two deformable oil droplets in water. *Science* .313, 210–213 (2006).
 42. Baca, H. K. et al. Cell-directed assembly of bio/nano interfaces - A new scheme for cell immobilization. *Acc. Chem. Res.*40, 836–845 (2007).
 43. Chen, H., Langer, R. & Edwards, D. A. A film tension theory of phagocytosis. *J. Colloid Interface Sci.*190, 118–133 (1997).
 44. Lundqvist, M. et al. Nanoparticle size and surface properties determine the protein corona with possible implications for biological impacts. *Proc. Natl. Acad. Sci. U. S. A.*105, 14265–14270 (2008).
 45. Peng, Q. et al. Preformed albumin corona, a protective coating for nanoparticles based drug delivery system. *Biomaterials*34, 8521–8530 (2013).
 46. Walkey, C. D. & Chan, W. C. W. Understanding and controlling the interaction of nanomaterials with proteins in a physiological environment. *Chem. Soc. Rev.*41, 2780–2799 (2012).
 47. Hadjidemetriou, M. et al. The Human In Vivo Biomolecule Corona onto PEGylated Liposomes: A Proof-of-Concept Clinical Study. *Adv. Mater.*31, 1–9 (2019).
 48. Monopoli, M. P. et al. Physical-Chemical aspects of protein corona: Relevance to in vitro and in vivo biological impacts of nanoparticles. *J. Am. Chem. Soc.*133, 2525–2534 (2011).
 49. Cedervall, T. et al. Understanding the nanoparticle-protein corona using methods to quantify exchange rates and affinities of proteins for nanoparticles. *Proc. Natl. Acad. Sci. U. S. A.*104, 2050–2055 (2007).
 50. Mahl, D., Greulich, C., Meyer-Zaika, W., Köller, M. & Epple, M. Gold nanoparticles: Dispersibility in biological media and cell-biological effect. *J. Mater. Chem.*20, 6176–6181 (2010).
 51. Tenzer, S. et al. Nanoparticle size is a critical physicochemical determinant of the human blood plasma corona: A comprehensive quantitative proteomic analysis. *ACS Nano*5, 7155–7167 (2011).
 52. Sotnikov, D. V., Berlina, A. N., Ivanov, V. S., Zherdev, A. V. & Dzantiev, B. B.

- Adsorption of proteins on gold nanoparticles: One or more layers *Colloids Surfaces B Biointerfaces* 173, 557–563 (2019).
53. Hirsh, S. L. et al. The Vroman effect: Competitive protein exchange with dynamic multilayer protein aggregates. *Colloids Surfaces B Biointerfaces* 103, 395–404 (2013).
 54. Casals, E., Pfaller, T., Duschl, A., Oostingh, G. J. & Puentes, V. F. Hardening of the nanoparticle-protein corona in metal (Au, Ag) and oxide (Fe₃O₄, CoO, and CeO₂) nanoparticles. *Small* 7, 3479–3486 (2011).
 55. Chen, E. Y. & Liu, W. F. Biomolecule immobilization and delivery strategies for controlling immune response. Understanding and utilizing the biomolecule/nanosystems interface (2018).
 56. Walczyk, D., Bombelli, F. B., Monopoli, M. P., Lynch, I. & Dawson, K. A. What the cell ‘sees’ in bionanoscience. *J. Am. Chem. Soc.* 132, 5761–5768 (2010).
 57. Shannahan, J. H. et al. Silver Nanoparticle Protein Corona Composition in Cell Culture Media. *PLoS One* 8, (2013).
 58. Göppert, T. M. & Müller, R. H. Polysorbate-stabilized solid lipid nanoparticles as colloidal carriers for intravenous targeting of drugs to the brain: Comparison of plasma protein adsorption patterns. *J. Drug Target* 13, 179–187 (2005).
 59. Tenzer, S. et al. Rapid formation of plasma protein corona critically affects nanoparticle pathophysiology. *Nat. Nanotechnol.* 8, 772–781 (2013).
 60. Kononenko, V., Narat, M. & Drobne, D. Nanoparticle interaction with the immune system. *Arh. Hig. Rada Toksikol.* 66, 97–108 (2015).
 61. Kittler, S. et al. The influence of proteins on the dispersability and cell-biological activity of silver nanoparticles. *J. Mater. Chem.* 20, 512–518 (2010).

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ НАНОЧАСТИЦ С БИОЛОГИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

**А.Х.КАРИМОВА, Н.Х.ГУРБАНОВА,
В.Ш.ЯГУБОВ, С.К.НУРИЕВА, Х.А.ШИРИНОВА**

РЕЗЮМЕ

В статье представлен литературный обзор общих характеристик взаимодействия наночастиц и биологических систем. Параллельно был проведен литературный анализ физико-химических и биологических свойств взаимодействий наноматериалов с биологическими компонентами. Таким образом, была изучена зависимость взаимодействия наночастиц с биологическими системами от таких параметров, как размер и форма частиц, химический состав, гидрофильные/гидрофобные свойства, морфология, поверхностная нагрузка и степень агломерации, а также была объяснена природа сил взаимодействия.

Ключевые слова: белковая корона, наночастицы, белки, мембрана, токсичность, клетка, функциональная группа, взаимодействие, гидрофильность, гидрофобность, биологическая среда.

GENERAL CHARACTERISTICS OF INTERACTIONS BETWEEN NANOPARTICLES AND BIOLOGICAL SYSTEMS

A.H.KARIMOVA, N.Kh.GURBANOVA, V.Sh.YAQUBOV,
S.G.NURIYEVA, H.A.SHIRINOVA

SUMMARY

In this article a literature review of the general characteristics of the interaction between nanoparticles and biological systems was carried out. At the same time, a literature analysis of the physicochemical and biological properties of the interactions between nanomaterials and biological components in these systems was conducted. Thus, the dependence of the interaction between nanoparticles and biological systems on parameters such as particle size and shape, chemical composition, hydrophilic/hydrophobic properties, morphology, surface load and degree of agglomeration was studied, and the nature of the interaction forces and protein corona formation process were explained.

Keywords: proteincorona, nanoparticles, proteins, membranes, toxicity, cell, functional group, interactions, hydrophilic, hydrophobic, biological environment.

УДК.541.122:535.568

PACS: 61.20.Ne, 66.20.+d, 82.60.Lf, 61.25.Hq.

**РЕОЛОГИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВОДНЫХ РАСТВОРОВ
МОЛЕКУЛЯРНО-МАССОВЫХ ФРАКЦИЙ
ПОЛИВИНИЛПИРРОЛИДОНА****С.Р. БАГИРОВА***Бакинский Государственный Университет,
Институт Физических Проблем
sbagirova2019@gmail.com*

В данной работе исследовалась температурная зависимость характеристической вязкости $[\eta]$, постоянной Хаггинса (k'), характеризующая сопротивляемость макромолекулярных клубков к проникновению в них молекул растворителя и второй вириальной коэффициент (A_2). Как известно, константа Хаггинса k' является ещё одной константой, которая наряду с характеристической вязкостью характеризует реологические свойства разбавленного раствора, причем определяется размером, формой и свойствами сегментов молекул полимера и свойством растворителя.

Ключевые слова: поливинилпирролидон, вязкость, характеристическая вязкость, постоянная Хаггинса.

1. Введение

Как известно, все фракции поливинилпирролидона (ПВП) с различными молекулярными массами хорошо растворимы в воде. Хорошая растворимость ПВП в воде обусловлена водородной связью молекулы воды с эфирными атомами кислорода. ПВП это своеобразный полимер обладающий особенными свойствами в водной среде. Эти характеристики в основном определяются конкуренцией воды и ПВП при образовании водородных связей между молекулами вода-вода и вода- ПВП. С ростом температуры в системе вода-ПВП происходит уменьшение числа водородных связей и взаимодействий между макромолекулярными цепями. Поскольку ПВП обладает многими уникальными свойствами (нетоксичен, не оказывает негативного влияния

на иммунную систему и т.д.), изучение его физико-химических свойств в водных системах играет важную роль в медицине (заменители плазмы крови, биоматериалы), фармакологии(таблетки), в косметике, пищевой промышленности т.д. [1-6].

Вискозиметрия – один из наиболее часто используемых методов для определения многих характеристик полимерных растворов. С помощью вискозиметра можно определить ряд величин (характеристическая вязкость, постоянная Хаггинса, коэффициент набухания и т. д), характеризующих макромолекулы полимеров в растворе (размеров и конформации макромолекул) [7-8].

Как известно, растворы высокомолекулярных соединений (ВМС) в отличие от растворов низкомолекулярных соединений сильно зависят от температуры и концентрации, обладают аномально большими значениями вязкости [9, 11]

По имеющимся в настоящее время представлениям в разбавленных растворах ВМС длинные гибкие макромолекулы сворачиваются в клубок разной степени пронизываемый для растворителя.

При определенном градиенте скорости во время ламинарного потока разные части макромолекулы движутся с разными скоростями. В результате на макромолекулы действует пара сил, которая вызывает ее вращение. Во время вращения макромолекулы между ее сегментами и молекулой растворителя возникает сила трение, которая также увеличивает вязкость раствора относительно растворителя.

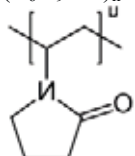
Как известно, константа Хаггинса k' является ещё одной константой, которая наряду с характеристической вязкостью $[\eta]$ определяет реологические свойства разбавленного раствора, причем определяется размером, формой и свойствами сегментов молекул полимера и молекул растворителя.

В конечном итоге k' определяет (характеризует) стремление растворителя в клубок, или сопротивляемость полимерного клубка растворителю [12-13].

В работе исследовалась температурная зависимость характеристической вязкости, постоянная Хаггинса (k'), характеризующая сопротивляемость макромолекулярных клубков к проникновению в них молекул растворителя и второй вириальный коэффициент (A_2) определяющий термодинамическое качество растворителя, т.е. сродство растворителя к полимеру. Использовали поливинилпирролидон (ПВП) различных молекулярно-массовых фракций (10000, 12000, 25000, 44000, 45000) немецкой фирмы Alfa Aesar, которые широко применяются в медицине, фармакологии и т.д.

Некоторая информация о происхождении и чистоте поливинилпирролидона приведены в таблице 1.

Таблица 1

Реактив	№ по каталогу	Фирма	Формула	Форма
Поливинилпирролидон (ПВП)	9003-39-8	Alfa Aesar	$(C_6H_9NO)_n$ 	порошок

Характеристическая вязкость разбавленных водных растворов ПВП определяли из концентрационной зависимости приведенной вязкости, $\left(\frac{\eta_{y\partial}}{c}\right)$ от концентрации полимера предложенной Хаггинсом эмпирическим уравнением:

$$\frac{\eta_{y\partial}}{c} = [\eta] + k'[\eta]^2 c \quad (1)$$

Где c – концентрация полимера в г/100мл, k' – постоянная Хаггинса, $[\eta]$ характеристическая вязкость, определялась выражением

$$[\eta] = \lim_{c \rightarrow 0} \frac{\eta_{y\partial}}{c} \quad (2)$$

Для определение $[\eta]$ использовали вискозиметр Убеллоде.

3. Результаты

Результаты для одного образца 5%-ного раствора полимера с молекулярной массой 25 000 приведены в таблице 2.

Таблица 2

t, °C	$\rho_{\text{вода}}, \text{г/м}^3$	$\eta_{\text{вода}}, \text{мПа}\cdot\text{сек}$	$\tau_{\text{вода}}, \text{сек}$	$\rho_{\text{раств}}, \text{г/м}^3$	$\tau_{\text{раств}}, \text{сек}$	$\eta_{\text{раств}}, \text{мПа}\cdot\text{сек}$
15	0.99862	1.1383	13.36	0.996226	29.1	2.473067
20	0.99823	1.0020	12.36	0.995988	27.2	2.200968
25	0.99681	0.8902	11.34	0.995962	23.5	1.842876
30	0.99568	0.7973	10.51	0.995742	20.8	1.577108
35	0.99372	0.7191	9.6	0.995478	18.8	1.409554
40	0.99225	0.6527	9.15	0.995214	17	1.215227
45	0.98898	0.5961	8.7	0.994906	15.7	1.082167
50	0.9881	0.5471	8.39	0.994599	14.4	0.944504

На рисунке 1 и 2 представлена температурная зависимость характеристической вязкости и постоянной Хаггинса водных растворов ПВП [14]).

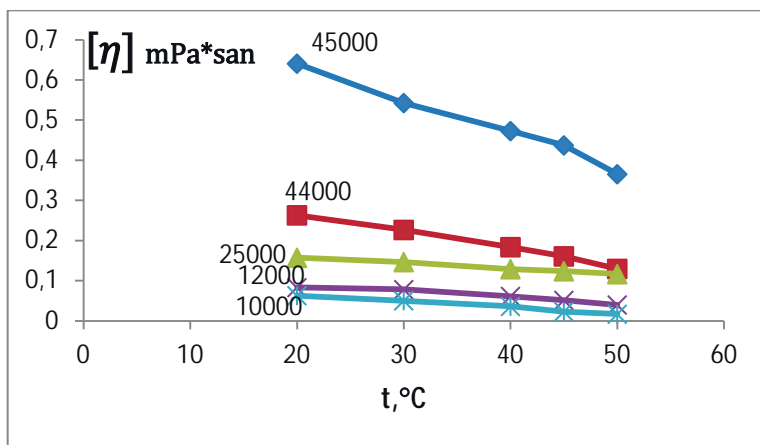


Рис. 1. Температурная зависимость характеристической вязкости водных растворов ПВП различных молекулярных масс

Как видно из рисунков 1 и 2 с ростом температуры характеристическая вязкость для всех исследованных фракций монотонно уменьшается, а постоянная Хаггинса k' увеличивается.

Характер этой зависимости свидетельствует о том, что система ПВП-вода обладает нижней критической температурой расслоения (НКТР). Об этом свидетельствует также монотонное увеличение постоянной Хаггинса характеризующей как уже было отмечено выше сопротивляемость проникновения воды в клубок с ростом температуры (рис 2) [12, 13].

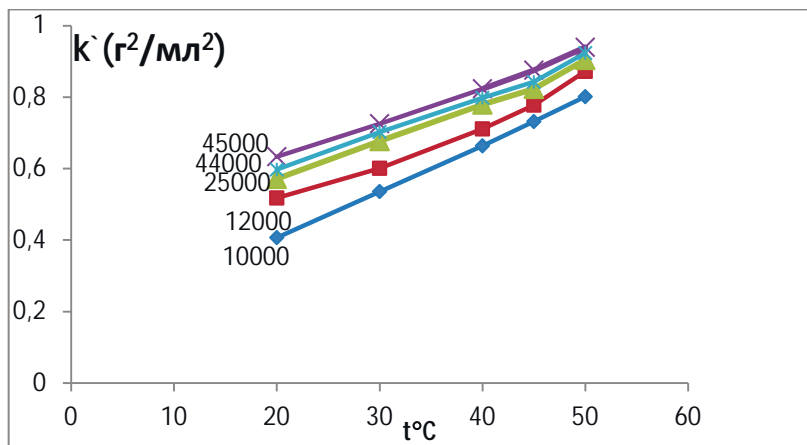


Рис.2. Зависимость постоянной Хаггинса от температуры для различных полимеров

Второго вириального коэффициента A_2 определяли с использованием полуэмпирического уравнения предложенного Кригбаумом [10] для зависимости характеристической вязкости от молекулярной массы поливинилпирролидона:

$$[\eta] = [\eta]_{\theta} + 0,50A_2 \cdot M . \quad (3)$$

Здесь $[\eta]_{\theta}$ характеристическая вязкость системы в θ растворителе. Значение второго вириального коэффициента находилось из наклона угла прямолинейной зависимости $[\eta] \square M$ [15].

В пользу вышеприведенных рассуждений говорит и температурная зависимость второго вириального коэффициента (рис. 3).

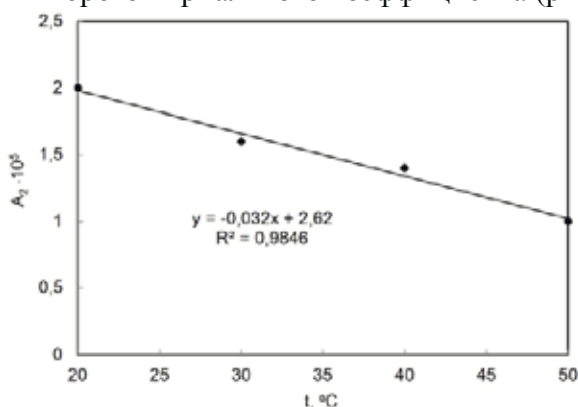


Рис. 3. Температурная зависимость второго вириального коэффициента

Действительно изменение характеристической вязкости от температуры находится в прямой связи зависимости от термодинамического качества растворителя. Если качество растворителя улучшается с ростом температуры (A_2 возрастает), клубок разбухает больше, сопротивление к потоку увеличивается, $[\eta]$ возрастает [14]. А если качество растворителя ухудшается с ростом температуры (A_2 уменьшается) взаимодействие сегментов макромолекулы между собой превалирует над взаимодействием молекул воды с сегментами, тогда проникновение воды в клубок ухудшается (постоянная Хаггинса растет), клубок сжимается, $[\eta]$ уменьшается.

ЛИТЕРАТУРА

1. Alkhayatt A.H.O., Al-Azzawi A.H., Alakayash Z. Rheological and optical characterization of Polyvinylpyrrolidone (PVP) - Polyethylene glycol (PEG) polymer blends // IOSR Journal of Applied Physics (IOSR-JAP). 2016, v. 8, Issue 1, p. 11–18.

2. Hui Q., Shengqiang N., Chong C. and Fen R. Insights into the surface property and blood compatibility of polyethersulfone /polyvinylpyrrolidone composite membranes:toward high-performance hemodialyzer // Polym. Adv. Technol, 2014, <https://doi.org/10.1002/pat.3316>.
3. Marani D., Sudireddy B.R., Kiebach R., Nielsen L., Ndoni S. Rheological properties of poly (vinylpyrrolidone) as a function of molecular weight // Annual Transactions of the Nordic Rheology Society, 2014, v. 22, p. 209.
4. Acosta M., Wiesner V.L., Martinez C.J., Trice R.W., Youngblood J.P. Effect of Polyvinylpyrrolidone Additions on the Rheology of Aqueous, Highly Loaded Alumina Suspensions // J. Am. Ceram. Soc, 2013. v. 96, p. 1372–1382.
5. Fenga Y., Wanga K., Yaoa J., Webleya, P. A., Smartc, S., Wanga H. Effect of the addition of polyvinylpyrrolidone as a pore-former on microstructure and mechanical strength of porous alumina ceramics // Ceram Inter., 2013, v. 39, p.7551–7556.
6. Marijana.J, Igor S., Zoran Z. and Stjepan M. Effect of Polyvinylpyrrolidone on the formation AgBr grains in gelatine Media // Croat. Chem. Acta, 2012, v. 85, p. 269–276.
7. Масимов Э.А., Пашаев Б.П., Гасанов Г.Ш., Гаджиева Ш.Н. Определение конформации и размеров макромолекул полиэтиленгликоля в водных растворах методом вискозиметрии // Журн. Физ. Химии, 2019, т. 93, №6, с. 845-849.
8. Шуляк И.В., Грушова Е.И. Расчет размеров молекул полиэтиленгликоля в растворах по данным вискозиметрии // Журн. Физ. Химии, 2013, т. 87, №12, с. 2079-2084.
9. Усков П.А., Уиллева А.М., Кленин В.П., Раевский В.С.// Журнал ВМС, 1976, т.18 А, №1, с. 243.
10. Kriqbaum W.R. // J. polymer Sci. 1958, v. 28, № 116, p. 213–221.
11. Тагер А.А., Вишнеков С.А., Андреев В.М., Секарева Т.В. // Журнал ВМС. 1994, т. 16 А, №1, с. 9.
12. Flory P.J. Principles of Polymer Chemistry. Cornell University Press., 1953, p. 266.
13. Huggins M. The Viscosity of Dilute Solutions of Long-chain Molecules. IV. Dependence on Concentration. // J. Am. Chem. Soc. 1942, v. 64, p. 2716–2718.
14. Bagirova S.R. Rheological Properties of Aqueous Based on Polyvinilpyrrolidone, // International Journal of Nanotechnology and Nanomedicine. 2019, v. 4, Issue 2.
15. Masimov E.A., Bagirova S.R., Hasanova H.T. Rheological study of water solutions molekular mass of (PVP) polyvinilpyrrolidone / 1st International congress on natural sciences (ICNAS-2021). Ataturk University Erzurum. 2021, p.453–456.

MÜXTƏLİF MOLEKUL KÜTLƏLİ POLİVİNİLPIRROLİDONUN SULU MƏHLULLARININ REOLOJİ TƏDQIQI

S.R.BAĞIROVA

XÜLASƏ

Təqdim olunan işdə xarakteristik özlülüyün $[\eta]$, polimer məhlulunda həlledicinin molekulyar yumağa nüfuzuna müqaviməti xarakterizə edən k' - Haqqıns sabitinin və A_2 ikinci virial əmsalın temperatur asılılığı tədqiq edilmişdir.

Məlum olduğu kimi k' - Haqqıns sabiti, xarakteristik özlüklə yanaşı, duru

məhlulların reoloji xüsusiyyətini xarakterizə edən, həmçinin həlledici və polimer molekullarının seqmentlərinin ölçü və formasını təyin edən daha bir sabitdir.

Açar sözlər: polivinilpirrolidon, özlülük, xarakteristik özlülük, Xaçqins sabiti.

RHEOLOGICAL STUDY OF WATER SOLUTIONS MOLECULAR MASS FRACTIONS (PVP) OF POLYVINYLPIRROLIDONE

S.R.BAGIROVA

SUMMARY

In this work, we studied the temperature dependence of the intrinsic viscosity, the Huggins constant, which characterizes the resistance of macromolecular coils to the penetration of solvent molecules and the second virial coefficient (A_2) into them. As is known, the Huggins constant K' is another constant that, along with the intrinsic viscosity $[\eta]$, characterizes the rheological properties of a diluted solution, and is determined by the size, shape and properties of segments of polymer molecules and solvent molecules.

Keywords: polyvinylpyrrolidone, intrinsic viscosity, Huggins constant.

UDC 621.315

**PHOTOCONDUCTIVITY OF ZnS THIN FILMS DEPOSITED
BY SOLUTION-PROCESSING TECHNIQUES**

R.S.JAFARLI
Baku State University
r.c_89@mail.ru

We have explored various solution- processing techniques to produce ZnS thin films on conducting (ITO) and silicon substrates along with ZnS-porous silicon composite films. All these samples obtained from different methods and chemical recipes were annealed under fixed ambient conditions and characterized by scanning electron microscopy (SEM), X-ray diffraction (XRD), and ultraviolet photocurrent response. Various characterizations reveal that the fabrication conditions and intrinsic defects of ZnS play a vital role in optoelectronic performance.

Keywords: Photoconductivity of ZnS, optoelectronic properties, Fabrication method, semiconductor.

1. Introduction

ZnS has attracted increasing attention as a potential material for optoelectronic devices such as low threshold blue/UV lasers, solar cells, LEDs, sensors, display devices and photodetectors. In recent years, various attempts were made to fabricate nano/mesa-scaled ZnS for further enhancing opto/electrical performance[1-3]. While many top-down fabrication approaches were followed, solution-based techniques turned out to be the most efficient and low-cost for the production of high quality nano and micro structured ZnS thin films. Electrochemical deposition is a true bottom-up technique, with the convenience of completely filling the interstitial spaces of templates, such as polymer microsphere templates, liquid crystal templates and porous (such as porous alumina) templates, from metal to semiconductor varieties. Similarly, electrospinning has been widely recognized as an electro- hydrodynamic method to produce nano to micro sized fibers from solutions containing the desired materials. However, the optoelectronic properties of ZnS are critically affected by the preparation conditions such as the fabrication method, types of substrates, thickness and annealing conditions. Therefore, it is necessary to optimise the fabrication

conditions of the aforementioned techniques for desired applications [4-6]

The direct electrochemical deposition of semiconductors, such as ZnS, on a silicon substrate is difficult due to conductivity issues as well as a large mismatch in thermal expansion coefficients and the high reactivity of silicon toward oxygen [7]. Porous silicon (PS) has been established as the most fascinating material for diverse optoelectronic applications, especially for photonic composites where the nano sized pores can be filled with different materials using simple solution-processing techniques [8].

In this paper, we have explored various solution-processing techniques to produce ZnS thin films on conducting (ITO) and silicon substrates along with ZnS-porous silicon composite films. All these samples obtained from different methods and chemical recipes were annealed under fixed ambient conditions and characterized by scanning electron microscopy (SEM), X-ray diffraction (XRD), and ultraviolet photocurrent response. All films obtained from various chemical recipes were essentially in the form of $\text{Zn}(\text{OH})_2$ after preparation, and to obtain ZnS, the samples were annealed at 400°C for 12 h under ambient conditions. Various characterizations reveal that the fabrication conditions and intrinsic defects of ZnS play a vital role in optoelectronic performance.

2. Experimental

In the literature, brief information is given about the technology of obtainment of ZnS thin layers only precipitated from the aqueous solution and about some properties. A complex physical-technological study of these layers, their the energy spectrum of local centers and purposeful management of the recombination process, depending on the technological environment, a comprehensive study of photoelectric properties is not provided. Negative photoeffects were not studied in ZnS thin layers. Metal-semiconductor obtained by the method of chemical deposition, Complex studies of MDR and isotope heterocycles have not been performed. The obtainment of materials under investigation, the technology of producing various structures of electric transition on their basis, as well as structure of the samples and the methods of investigation of parameters were studied.

The technological mode of removal of thin layers by chemical deposition method has a significant impact on their physical properties. Selection of the deposition regime of the thin layers is determined by their composition, concentration of components and molar ratios, as well as temperature and duration of deposition. Here in this work are the improvements in the method of obtaining thin layers. Thermodynamic calculations show that as the temperature of the solution increases, the amount of alkali in the solution should be reduced and temperature should be within

80⁰ C. However, it has been used ammonium as a complex creator in the case of recombination editing; As the ammonia is alkaline, it reduces the rate of disintegration of the components. The addition of 3-5 ml of ammonia in the solution leads to an increase in the concentration of small dispersion particles. It also increases the thickness of the precipitated layer. Thus, the concentration of Zn²⁺ ions in the solution decreases due to the increase of concentration of Zn (NH₂)₂ complex ions. As a result, the amount of matter in the layer decreases with the speed of the reaction, which in turn increases the thickness of the layer.

The thin layers of different chemical and percentage composition, depending on the properties (crystallographic, electrical, photoelectric and optical) and where they are applied (in the preparation of resistors, diode structures, photocell), have been obtained on different types of surface morphology, orientation and type (metal, semiconductor or oxide) pallets (Al, sital, glass/SnO₂, glass/In₂O₃).

The synthesis of nanocrystals of A^{II}B^{VI} type compounds is carried out in the teflon cell. For this purpose, the pre-prepared solutions are added to the silica in turn and mixed continuously. Synthesis is carried out on the following reactions:



The ZnS thin films were deposited by Chemical Bath Deposition Technique on glass substrate. The glass substrates were first washed with liquid detergent and rinsed thoroughly in double distilled water and then it is placed in boiled water for a few minutes. They were finally immersed into acetone for 15 minutes and then dried in an oven. The materials used for deposition of ZnS nanocrystalline thin films are lead acetate as source material of lead ion, thiourea as the source of Sulphur ion and cadmium acetate as the source of cadmium ion respectively. The lead acetate solution of 0.1M was prepared with double distilled water stirring separately at 500C until a clear solution is obtained. The pH value of lead acetate solution is maintained at 10 by adding the ammonia solution to it drop by drop slowly.

The p-Si plaques and layers, which are used as a base, during use in next step (when thin layers are precipitated) before entering the reaction $\text{KOH} + \text{KNO}_3$ at a room temperature in (1:4) solution stored for 1-2 hours, and after it is washed with bidistyle chloride and dried with nitrogen and quickly absorbed in the cold iodine solution. It was then introduced into the chemical solution as extracted therefrom. Used as a base and mainly used for the study of optical properties of thin layers *glass/n-In₂O₃* (1 sm×1 sm or 0.5 sm×1 sm measure), *glass/ITO* (*In₂O₃* and *SnO₂* system solid solution) (1 sm×1 sm or 0.4 sm×0.6 sm measure), *glass/n-SnO₂* and (1sm×1sm or

0.4sm×0.6sm measure) ~100-500 nm thickness thin layers $4 \cdot 10^{-4}$ - $8 \cdot 10^{-3}$ Om·sm had special resistance. The oxide pallets were cleaned from physical and chemical contamination.

3. Results and discussion

The obtained ZnS thin films from various solution processing methods show considerable variation in structural, optical and optoelectronic properties on deposition parameters and conditions. Since the annealing condition for all the films was same (400 °C for 12 h in air), in the present study the structural and optical properties of various films are compared and analyzed. As shown in Fig. 1, the XRD patterns were recorded for all annealed ZnS thin films obtained from (1) electrodeposition from ZnCl₂ onto a silicon substrate, (2) electrodeposition from Zn(NO₃)₂ solutions onto an ITO substrate, (3) chemical deposited ZnS from a Zn(Ac)₂ solution onto an ITO substrate, and (4) a ZnS-PS nanocomposite. Asterisks (*) indicate the XRD peaks of silicon. All the films were showing strong XRD peaks of wurtzite crystalline structure, with traces of substrate (Si) related diffraction peaks.

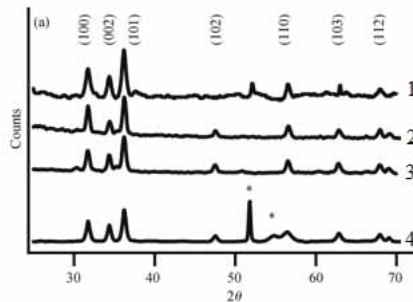


Fig.1 (a) XRD patterns of ZnS (1) electrodeposited from ZnCl₂ and (2) electrodeposited from Zn(NO₃)₂ solutions, (3) chemical deposited ZnS from Zn(Ac)₂ solution and (4) ZnS-PS nanocomposite/ The asterisk (*) indicates XRD peaks of silicon.

Steady-state and transient photocurrent measurements were performed on all ZnS films made from different solution processing techniques. Here the ZnS films were exposed to a UV laser (2 mW, 337 nm) and the photocurrent was monitored using the wet electrode method. Figure 2(a) shows the normalised photocurrent response, when the illuminated light was switched ON and OFF at different bias conditions. The data represents the ZnS thin films obtained from (1) electrochemical deposition from ZnCl₂, (2) electrochemical deposition from Zn(NO₃)₂ solutions, (3) chemical deposited film from a Zn(Ac)₂ solution and (4) a ZnS-PS nanocomposite. As seen, the photocurrent varies linearly with the increase

in the bias voltage. While all films show more or less similar responses, the photocurrent efficiencies measured under similar conditions are different. Here, the photocurrent efficiency is defined as $QE = \frac{I_{\text{photo}}}{I_{\text{dark}}} = \frac{I_{\text{photo}}}{I_{\text{dark}}}$, where the I_{dark} and I_{photo} are the photocurrents when the light is OFF and ON, respectively. The QE for ZnS obtained from chemical deposited film from $Zn(Ac)_2$ solution is 50 whereas for ZnS-PS the nanocomposite is only

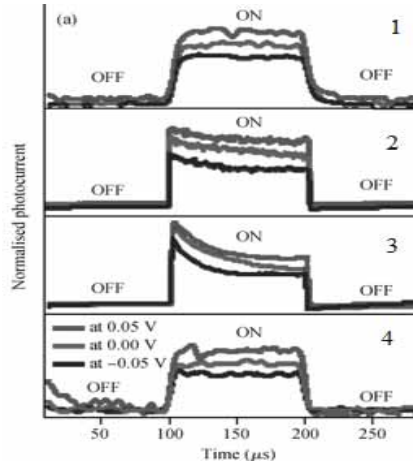


Fig. 2. (a) Normalised photocurrent ON–OFF response of ZnS films prepared from various methods. (b) Transient photocurrent response of ZnS deposited from various methods, the Si detector response is shown as a reference. Labels 1-4 represent the same as Fig. 1(a).

To study the transient photocurrent behaviour, the resultant photocurrent response obtained from the excitation of a nanosecond UV laser (337 nm, 5 ns, 100 Hz) was monitored through a digital oscilloscope using a commercial silicon detector as a photocurrent response reference (Fig. 2(b)). Essentially all films show a fast photocurrent rise followed by an oscillatory decay. The photocurrent decay is composed of two components: a fast fall followed by slow fall of an oscillatory nature.

While ZnS obtained from electrodeposition shows both exciton as well as defect related PL, the ZnS obtained from chemical deposited shows dominant excitonic related features in both absorption as well as PL, indicating the minimum influence of defects (Fig. 3).

Therefore, the transient photocurrent response rise time is due to the desorption of O_2 . Whereas, the photocurrent fast fall is due to the transit time taken by the carriers, which is inversely proportional to the electron mobility and bias voltage. The oscillatory slow decay phenomenon is the result of persistent photoconductivity effects attributed to the presence of oxygen-related hole-trap states at the surface, which prevent charge-carrier re- combination and prolongs the photocarrier lifetime. Similar behavior has

been observed for the ZnS fabricated from various other methods. While the ZnS grown from various aforementioned methods shows a good crystalline quality, the origin of oxygen defects on the surfaces could be from both deposition conditions as well as annealing in an air at mosphere. However, in the present case, though solution processing recipes are different, the obtained ZnS may be compared since the annealing conditions for all the ZnS films are the same. Hence, these results broadly suggest that the photocurrent response of ZnS could be related to its structural and surface properties, essentially to the process induced intrinsic defects of ZnS. Figure 3 shows the wavelength (200– 500 nm) dependent photocurrent characteristics of ZnS thin films fabricated from various precursors. The spectral respon sivity shows a distinct broad peak centred at about 360 nm, which corre spond to the band gap of ZnS.

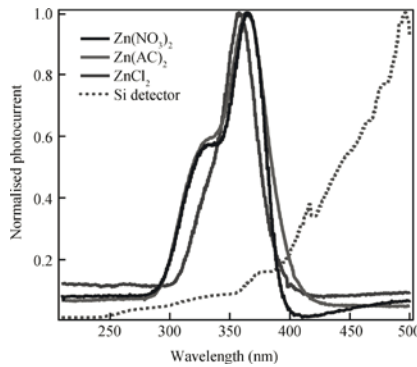


Fig. 3. Wavelength dependent photocurrent response of ZnS electrodeposited thin films obtained from $Zn(NO_3)_2$, $Zn(Ac)_2$ and $ZnCl_2$ solutions.

4. Conclusion

We have explored various solution- processing techniques to produce ZnS thin films on conducting (ITO) and silicon substrates along with ZnS-porous silicon composite films. All these samples obtained from different methods and chemical recipes were annealed under fixed ambient conditions and characterized by scanning electron microscopy (SEM), X-ray diffraction (XRD), and ultraviolet photocurrent response. Various characterizations reveal that the fabrication conditions and intrinsic defects of ZnS play a vital role in optoelectronic performance.

REFERENCES

1. Mirov S., Fedorov V., Moskalev I., Mirov M., and Martyshkin D., *Lumin J.* 133, 268, 2013.
2. Gloeckler M., Sankin I., and Zhao Z., *IEEE J. Photovolt.* 3, 1389, 2013
3. Farias P.M., Santos B.S., de Thomaz A. A., Ferreira R., Menezes F.D., Cesar C.L.,

- and Fontes A. // J. Phys. Chem. B 112, 2734, 2008
4. Ravikumar A.P., De Jesus J., Tamargo M. C., and Gmachl C. F. Appl. Phys. Lett. 107, 141105, 2015
 5. Li J., Diercks D.R., Ohno T.R., Warren C.W., Lonergan M.C., Beach J. D., and Wolden C.A., Sol. Energy Mater. Sol. Cells 133, 208, 2015
 6. Gessert T.A., Asher S., Johnston S., Young M., Dippo P., and Corwine C. Thin Solid Films 515, 6103, 2007
 7. Lee D.U., Kim S.P., Lee K.S., Pak S.W., and Kim E.K., Appl. Phys. Lett. 103, 263901, 2013
 8. Nakasu T., Kobayashi M., Togo H., and Asahi T. // J. Electron. Mater. 43, 921, 2014

HƏLLİ-EMAL TEXNİKASI İLE DÖNDÜRƏN ZnS İNCE PİMLƏRİN FOTOKEÇİRİLMƏSİ

R.S.CƏFƏRLİ

XÜLASƏ

ZnS-məsaməli silikon kompozit filmlərlə birlikdə keçirici (ITO) və silisium substratlarında ZnS nazik filmləri istehsal etmək üçün müxtəlif məhlul emal üsullarını araşdırdıq. Müxtəlif üsullardan və kimyəvi reseptlərdən əldə edilən bütün bu nümunələr sabit mühit şəraitində tavllanmış və skan edən elektron mikroskopiya (SEM), rentgen şüalarının difraksiyası (XRD) və ultrabənövşəyi foto cərəyan reaksiyası ilə xarakterizə edilmişdir. Müxtəlif xarakteristikalar göstərir ki, ZnS-nin istehsal şərtləri və daxili qüsurları optoelektronik performansda mühüm rol oynayır.

Açar sözlər: ZnS-nin fotokeçiriciliyi, optoelektronik xassələr, Fabrikaton metodu, yarımkeçirici.

ФОТОПРОВОДНОСТЬ ТОНКИХ ПЛЕНОК ZnS, НАНЕСЕННЫХ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДОВ ОБРАБОТКИ РАСТВОРА

Р.С.ДЖАФАРЛЫ

РЕЗЮМЕ

Мы исследовали различные методы обработки растворов для производства тонких пленок ZnS на проводящих (ITO) и кремниевых подложках, а также композитных пленок ZnS-пористый кремний. Все эти образцы, полученные с помощью различных методов и химических рецептов, были отожжены при фиксированных условиях окружающей среды и охарактеризованы с помощью сканирующей электронной микроскопии (СЭМ), рентгеновской дифракции (РД) и реакции на ультрафиолетовый фототок. Различные характеристики показывают, что условия изготовления и внутренние дефекты ZnS играют жизненно важную роль в характеристиках оптоэлектроники.

Ключевые слова: фотопроводимость ZnS, оптоэлектронные свойства, метод изготовления, полупроводник.

MÜNDƏRİCAT

RİYAZİYYAT

Sadiqov M.A.

Məhdudiyətli ekstremal məsələdə zəruri şərtlər haqqında 5

İsayeva S.E.

Qeyri-xətti akustik qoşmalığ şərtlə qeyri-xətti güclü dissipativ dalğa tənlikləri üçün lokal həllərin varlığı..... 16

Həmidov R.H., Allahverdiyeva N.K.

Parametrik xətti proqramlaşdırmanın böyük ölçülü bir məsələsi və onun həlli 28

Fəttayev H.D., Bəşirli A.B.

(0,2) tipli tenzor reperlərinin laylanmasında bəzi strukturların tədqiqi..... 38

Cəbrayilov Ş.İ., Məmmədova N.B., Şərifov Y.Ə.

İmpuls təsirli qeyri-xətti birinci tərtib qeyri-lokal sərhəd şərtlə inteqro-diferensial tənliklərin həllinin varlığı və yeganəliyin nəticələri 47

Mahmudova M.H., Məsməliyev H.M.

Modifikasiya olunmuş birinci növ Bessel funksiyasının və onun törəməsinin sıfırlarının paylanması 57

Məhərrəmli Ş.İ.

Parabolik tənliyin sərbəst həddinin tapılması haqqında inteqral şərtlərlə variasional formada tərs məsələnin fərq aproksimasiyası və requlyarlaşdırılması 62

Hüseynov O.M., Məmmədov T.C.

Üçüncü tərtib hiperbolik tip tənliklər üçün xarakteristik və xarakteristik olmayan xətt hissələri üzərində Koşi və Qursa tipli məsələlər..... 75

İNFORMATİKA

Rəhimova G.Ə.

Proqnozlaşdırma metodlarının dəqiqliyi, modellərin adekvatlığını ekonometrik üsullarla qiymətləndirmə metodikaları..... 80

FİZİKA

Məsimov E.Ə., Ocaqverdiyeva S.Y., Cəfərova F.Ə., Musayeva N.C., Şahverdiyev Y.X.	
Dekstranın sulu məhlullarının fiziki-kimyəvi tədqiqi.....	90
Fiqarova S.R., Mahmudov M.M.	
Güclü maqnit sahəsində ifratqəfəslərdə ion aşqarlarından səpilmə zamanı relaksasiya prosesləri.....	99
Muradov M.B., Eyvazova Q.M., Qəhrəmanlı L.R.	
Silar üsulu ilə alınmış $Cd_xZn_{1-x}S$ əsasında nanomaterialların fiziki xassələri.....	108
Həsənova L.H., Məhəmmədov Ə.Z.	
$Cu_3In_5S_9$ monokristalında aşqar udma.....	121
Əhmədov F.N., Manaşova M.A.	
Müxtəlif hadisə generatorlarından istifadə edərək $ZH, H \rightarrow b\bar{b}$ hadisələrin seçilmə şərtlərinin tədqiqi.....	125
Kərimova A.H., Qurbanova N.X., Yaqubov V.Ş., Nuriyeva S.Q., Şirinova H.A.	
Nanohissəciklər və bioloji sistemlərarası qarşılıqlı əlaqələrin ümumi xarakteristikası.....	132
Bağirova S.R.	
Müxtəlif molekul kütləli polivinilpirrolidonun sulu məhlullarının reoloji tədqiqi.....	146
Cəfərli R.S.	
Həlli-emal texnikası ilə döndürən ZnS incə pilmənin fotokeçirilməsi.....	153

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Садыгов М.А.
 О необходимых условиях в экстремальных задачах с ограничением..... 5

Исаева С. Э.
 Существование локальных решений для нелинейных сильно диссипативных волновых уравнений с нелинейными акустическими условиями сопряжения..... 16

Гамидов Р.Г., Аллахвердиева Н.К.
 Об одной большой задаче параметрического программирования и её решение..... 28

Фатгаев Г.Д., Баширли Ф.Б.
 Исследование некоторых структур в расслоение тензорных реперов типа $(0,2)$ 38

Джабраилов Ш.И., Мамедова Н.Б., Шарифов Я.А.
 Существование и единственность результатов для нелинейных импульсных интегро-дифференциальных уравнений первого порядка с нелокальными граничными условиями 47

Махмудова М.Г., Масмалиев Г.М.
 О распределении нулей модифицированной функции Бесселя первого рода и ее производной 57

Магеррамли Ш.И.
 Разностная аппроксимация и регуляризация обратной задачи в вариационной форме о нахождения свободного члена параболического уравнения с интегральными условиями 62

Гусейнов О.М., Мамедов Т.Д.
 О задачах типа Коши и Гурса на линиях с характеристическими и не характеристическими кусками для гиперболических уравнений третьего порядка 75

ИНФОРМАТИКА

Рагимова Г.А.
 Точность методов прогнозирования, методика оценки адекватности моделей с эконометрическим методом 80

ФИЗИКА

Масимов Э.А. , Оджавердиева С.Я., Джафарова Ф.А., Мусаева Н.Дж., Шахвердиев Я.Х.	
Физико-химическое исследование водных растворов декстрана.....	90
Фигарова С.Р., Махмудов М.М.	
Релаксационные процессы в сверхрешетках в сильных магнитных полях при рассеянии на ионизированных примесях.....	99
Мурадов М.Б., Эйвазова Г.М., Гахраманлы Л.Р.	
Физические свойства наноматериалов $Cd_xZn_{1-x}S$ по методу Silar.....	108
Гасанова Л.Г., Магомедов А.З.	
Примесное поглощение в монокристалле $Cu_3In_5S_9$	121
Ахмадов Ф.Н., Манашова М.А.	
Исследование условий выбора событий $ZH, H \rightarrow b\bar{b}$ с использованием различных генераторов событий.....	125
Каримова А.Х., Гурбанова Н.Х., Ягубов В.Ш., Нуриева С.К., Ширинова Х.А.	
Общая характеристика взаимодействия наночастиц с биологическими Системами	132
Багирова С.Р.	
Реологическое исследование водных растворов молекулярно-массовых фракций поливинилпирролидона.....	146
Джафарлы Р.С.	
фотопроводность тонких пленок ZnS , нанесенных с помощью методов обработки раствора	153

CONTENTS

MATHEMATICS

Sadygov M. A.

On the necessary conditions in extremum problems with constraint5

İsayeva S.E.

Existence of local solutions for nonlinear strongly dissipative wave equations with nonlinear transmission acoustic conditions 16

Hamidov R.H., Allahverdiyeva N.K.

On solution of one large-scale parametric programming 28

Fattayev H.D., Bashirli A.B.

Study of some structures in the bundle of tensor frames of type (0,2) 38

Jabrailov Sh.I., Mammadov N.B., Sharifov Y.A.

Existence and uniqueness results for the first-order non-linear impulsive integro-differential equations with two-point boundary conditions 47

Makhmudova M.G., Masmaliyev H.M.

On the distribution of zeros of a modified Bessel function of the first kind and its derivative 57

Maharramli Sh.I.

Difference approximation and regularization of the variational statement of the inverse problem of determining the free term of a parabolic equation with integral conditions 62

Huseynov O.M., Mammadov T.C.

Fundamental solution of Cauchy and Goursat problems for the hyperbolic equations of the third order 75

INFORMATICS

Rahimova G.A.

Accuracy of methods of forecasting, technique of the assessment of adequacy of models with econometric method 80

PHYSICS

Masimov E.A., Ojagverdieva S.Ya., Jafarova F.A., Musayeva N.J., Shakhverdiev Ya.Kh.

Physico-chemical study of dextran aqueous solutions 90

Figarova S.R., M.M.Mahmudov M.M.

Relaxation processes in superlattices in strong magnetic fields during scattering by ionized impurities 99

Muradov M.B., Eyvazova G.M., Gahramanli L.R. Physical properties of $Cd_xZn_{1-x}S$ nanomaterials by Silar method.....	108
Hasanova L.G., Mahammadov A.Z. Impurity absorption in a $Cu_3In_3S_9$ single crystal	121
Ahmadov F.N., Manashova M.A. Study of $ZH, H \rightarrow b\bar{b}$ events selection conditions using different event generators.....	125
Karimova A.H., Gurbanova N.Kh., Yaqubov V.Sh., Nuriyeva S.G., Shirinova H.A. General characteristics of interactions between nanoparticles and biological systems.....	132
Bagirova S.R. Rheological study of water solutions molecular mass fractions (pvp) of polyvinylpyrrolidone	146
Jafarli R.S. Photoconductivity of ZnS thin films deposited by solution-processing techniques	153